МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2$ и $y=f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2-1$ и $y=f(x)+1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y=x^2+1$ и $y=f(x)+2$.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}2x+y+2xy=11,\\ 2x^2y+xy^2=15.\end{cases}$$

3. Хорды AB и CD окружности центром O имеют длину 10. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P, причем $DP=3$. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L. Найдите отношение $AL:LC$.

4. Есть 306 различных карточек с числами $3,\ 19,\ 3^2,\ 19^2,\ldots,3^{153},\ 19^{153}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа?

5. В окружность Ω радиуса 10 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \parallel B_1D_1$, $BD \parallel A_1C_1$. Найдите отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD=16$, $BC=12$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x^2-ax-x+a)\sqrt{x+5}\leqslant 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases}x-y\geqslant |x+y|,\\ \frac{x^2-6x+y^2-8y}{3y-x+6}\geqslant 0.\end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 10 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x)$ равно $2\sqrt{3}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 2$ и $y = f(x) + 1$ равно $\sqrt{60}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + 3y + 3xy = -1, \\ x^2y + 3xy^2 = -4. \end{cases}$$

3. Хорды AB и CD окружности центром O имеют длину 5. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P, причем $DP = 13$. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L. Найдите отношение $AL : LC$.

4. Есть 294 различные карточки с числами $7,\ 11,\ 7^2,\ 11^2, \ldots, 7^{147},\ 11^{147}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа?

5. В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \parallel B_1D_1$, $BD \parallel A_1C_1$. Найдите отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 24$, $BC = 10$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $(x^2 - ax + 2x - 2a)\sqrt{5 - x} \leqslant 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 5?

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} y + x \geqslant |x - y|, \\ \frac{x^2 - 8x + y^2 + 6y}{x + 2y - 8} \leqslant 0. \end{cases}$$
Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

Билет 9

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2$ и $y=f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2-1$ и $y=f(x)+1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y=x^2+1$ и $y=f(x)+2$.

   Ответ: $\sqrt{26}$.

   Решение. Пусть $f(x)=ax+b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2=ax+b$, а во втором случае – из уравнения $x^2-1=ax+b+1$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2-ax-b=0$, откуда $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$, $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4b}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2-x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+8)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases}(a^2+1)(a^2+4b)=10,\\(a^2+1)(a^2+4b+8)=42,\end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2=3$, $b=-\frac{1}{8}$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2-ax-b-1=0$, поэтому $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4b+4}=\sqrt{6{,}5}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2-x_1|\sqrt{a^2+1}=\sqrt{6{,}5}2=\sqrt{26}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x+y+2xy=11,\\2x^2y+xy^2=15.\end{cases}$

   Ответ: $\left(\frac{1}{2};5\right)$, $(1;3)$, $\left(\frac{3}{2};2\right)$, $\left(\frac{5}{2};1\right)$.

   Решение. Сделаем замену $2x+y=u$, $xy=w$. Тогда система принимает вид

   $$\begin{cases}u+2w=11,\\uw=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=11-2w,\\w(11-2w)=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=11-2w,\\2w^2-11w+15=0.\end{cases}$$

   Из второго уравнения последней системы находим, что $w=3$ (и тогда $u=5$) или $w=\frac{5}{2}$ (и тогда $u=6$). Возвращаемся к исходным переменным.

   Если $u=6$, $w=\frac{5}{2}$, то $\begin{cases}2x+y=6,\\xy=\frac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=6-2x,\\x^2-3x+\frac{5}{4}=0.\end{cases}$ Значит, $x=\frac{5}{2}$ (при этом $y=1$) или $x=\frac{1}{2}$ (при этом $y=5$).

   Если $u=5$, $w=3$, то $\begin{cases}2x+y=5,\\xy=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5-2x,\\2x^2-5x+3=0.\end{cases}$ Значит, $x=\frac{3}{2}$ (при этом $y=2$) или $x=1$ (при этом $y=3$).

3. Хорды AB и CD окружности центром O имеют длину 10. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P, причем $DP=3$. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L. Найдите отношение $AL:LC$.

   Ответ: $AL:LC=3:13$.

   Решение. Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому $OH=ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN=PH$, $\angle OPN=\angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно; отсюда следует, что $AN=DH$ и поэтому $AP=DP=3$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, получаем, что $\frac{AL}{LC}=\frac{PA}{PC}=\frac{PA}{PD+DC}=\frac{3}{13}$.

4. Есть 306 различных карточек с числами $3, 19, 3^2, 19^2, \ldots, 3^{153}, 19^{153}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа?

Ответ: 17 328.

Решение. Чтобы получить квадрат натурального числа, необходимо и достаточно, чтобы каждый множитель входил в разложение числа на простые множители в чётной степени.

Допустим, выбраны две карточки со степенями тройки. У нас есть 76 чётных показателей $(2, 4, 6, \ldots, 152)$ и 77 нечётных показателей $(1, 3, 5, \ldots, 153)$. Нам нужно, чтобы сумма показателей оказалась чётной. Чтобы сумма двух натуральных чисел оказалась чётной, мы можем либо выбрать два чётных числа $\left(C_{76}^2 = \frac{76\cdot 75}{2} = 2850 \text{ способов}\right)$, либо два нечётных числа $\left(C_{77}^2 = \frac{77\cdot 76}{2} = 2926 \text{ способов}\right)$. Получаем $2850 + 2926 = 5776$ способов.

Количество способов, когда на обеих выбранных карточках написаны степени числа 19, точно такое же, т.е. 5776.

Если взята одна карточка со степенью тройки и одна карточка со степенью числа 19, то оба показателя должны быть чётными – получаем $76 \cdot 76 = 5776$ способов.

Итого: $5776 \cdot 3 = 17\,328$ способов.

5. В окружность Ω радиуса 10 вписаны трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \parallel B_1D_1$, $BD \parallel A_1C_1$. Найдите отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 16$, $BC = 12$.

Ответ: $\frac{49}{50}$ или $\frac{1}{2}$.

Решение. Проведём через центр окружности O прямую, перпендикулярную основаниям трапеции. Пусть она пересекает AD и BC в точках N и M соответственно. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, $BM = MC = 6$, $AN = ND = 8$. По теореме Пифагора из треугольников OND и OMC находим, что $ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = 6$, $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 8$. Возможны два случая.

1) Точка O не лежит на отрезке MN. Тогда высота трапеции есть $MN = OM - ON = 2$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на основание AD. Так как трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная, $DH = \frac{AD+BC}{2} = 14$. Тогда $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$. Площадь любого четырёхугольника равна полупроизведению диагоналей, умноженному на синус угла между ними. В силу того, что диагонали прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ параллельны диагоналям трапеции $ABCD$, угол между ними равен углу между диагоналями трапеции. Обозначим этот угол через ψ. Кроме того диагонали прямоугольника, вписанного в окружность, являются его диаметрами, поэтому $A_1C_1 = B_1D_1 = 20$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\psi = 100\sin\psi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\psi = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \sin\psi = 200\sin\psi$. Значит, отношение площадей равно $\frac{100\sin\psi}{200\sin\psi} = \frac{1}{2}$.

2) Точка O лежит на отрезке MN. Тогда $MN = ON + OM = 14$. Аналогично первому случаю находим, что $DH = 14$, $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = 14\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\varphi = 196\sin\varphi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \sin\varphi = 200\sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями трапеции. Отсюда отношение площадей есть $\frac{196\sin\varphi}{200\sin\varphi} = \frac{49}{50}$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $\left(x^2 - ax - x + a\right)\sqrt{x+5} \leqslant 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

Ответ: $a \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условием $x \geqslant -5$. Раскладывая квадратный трёхчлен в скобках на множители (например, методом группировки), получаем $(x-1)(x-a)\sqrt{x+5} \leqslant 0$. Будем решать это неравенство методом интервалов. Для того, чтобы расположить точки, в которых левая часть неравенства обращается в ноль, на числовой прямой, необходимо рассмотреть несколько случаев.

1) $a < -5$. Тогда множитель $(x-a)$ положителен на ОДЗ, и его можно не рассматривать. Получаем $(x-1)\sqrt{x+5} \leqslant 0$, $x \in [-5; 1]$. Очевидно, на этом промежутке есть точки, находящиеся на расстоянии 4 друг от друга (например, $x = -4$ и $x = 0$). Все значения $a < -5$ удовлетворяют условию задачи.

2) $a = -5$. Неравенство принимает вид $(x-1)(x+5)\sqrt{x+5} \leqslant 0$, что равносильно неравенству, полученному в предыдущем случае. Значит, $a = -5$ подходит.

3) $-5 < a < 1$. Тогда получаем $x \in \{-5\} \cup [a; 1]$. Если $a \leqslant -1$, то в этом множестве есть точки на расстоянии 4 друг от друга ($x = -1$ и $x = -5$); если $a > -1$, то таких точек нет. Значит, в этом случае подходят значения $a \in (-5; -1]$.

4) $a = 1$. Неравенство принимает вид $(x-1)^2\sqrt{x+5} \leqslant 0$ и выполняется только при $x = -5$ и $x = 1$. Этот случай не подходит.

5) $a > 1$. Тогда $x \in \{-5\} \cup [1; a]$, и решения на расстоянии, равном 4, есть при $a \geqslant 5$.

Объединяя результаты всех рассмотренных случаев, получаем $a \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \geqslant |x+y|, \\ \frac{x^2-6x+y^2-8y}{3y-x+6} \geqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

Ответ: 3.

Решение. Первое неравенство равносильно[1] системе $\begin{cases} x+y \leqslant x-y, \\ x+y \geqslant y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$.

Рассмотрим второе неравенство. Его можно записать в виде $\frac{(x-3)^2+(y-4)^2-25}{3y-x+6} \geqslant 0$. Числитель дроби в левой части неравенства обращается в 0 на окружности радиуса 5 с центром в точке $Q(3; 4)$ (назовём её ω). Знаменатель дроби равен нулю на прямой $y = -2 + \frac{x}{3}$ (назовём её ℓ). Точки пересечения окружности и прямой определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} x = 3y+6, \\ x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y+6, \\ (3y+6)^2 - 6(3y+6) + y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y+6, \\ y^2 + y = 0, \end{cases}$$

откуда получаем две точки $A(3; -1)$ и $B(6; 0)$. Обозначим также начало координат через O, а точку пересечения прямой ℓ с осью Oy через C (несложно определить, что координаты точки C – это $(0; -2)$).

Неравенство выполняется:

– во всех точках окружности ω кроме точек A и B (тогда числитель дроби равен нулю);

– внутри окружности ω в точках, расположенных ниже прямой ℓ (числитель и знаменатель отрицательны);

– вне окружности ω в точках, расположенных выше прямой ℓ (числитель и знаменатель положительны).

Опишем множество точек M, которые удовлетворяют исходной системе неравенств. Оно состоит из сегмента окружности, ограниченного хордой AB и находящегося снизу от этой хорды, а также криволинейного треугольника AOC, границами которого являются дуга AO окружности ω и отрезки AC и CO (при этом точки прямой ℓ множеству не принадлежат, а остальные точки границы – принадлежат).

Заметим, что в силу симметрии сегмент окружности, расположенный ниже хорды AB, равен сегменту окружности, расположенному ниже хорды AO. Значит, площадь фигуры M равна площади треугольника ACO, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.

[1] $|A| \leqslant B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B. \end{cases}$

Билет 10

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x)$ равно $2\sqrt{3}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 2$ и $y = f(x) + 1$ равно $\sqrt{60}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$.

   Ответ: $2\sqrt{11}$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 = ax + b$, а во втором случае – из уравнения $x^2 - 2 = ax + b + 1$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - b = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(a^2+4b\right)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(a^2+4b+12\right)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases} \left(a^2+1\right)\left(a^2+4b\right) = 12, \\ \left(a^2+1\right)\left(a^2+4b+12\right) = 60, \end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 3$, $b = 0$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b - 2 = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b + 8} = \sqrt{11}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2 - x_1|\sqrt{a^2+1} = \sqrt{11} \cdot 2 = 2\sqrt{11}$.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + 3y + 3xy = -1, \\ x^2y + 3xy^2 = -4. \end{cases}$$

   Ответ: $\left(-3; -\frac{1}{3}\right)$, $(-1; -1)$, $\left(-1; \frac{4}{3}\right)$, $\left(4; -\frac{1}{3}\right)$.

   Решение. Сделаем замену $x + 3y = u$, $xy = w$. Тогда система принимает вид
$$\begin{cases} u + 3w = -1, \\ uw = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 - 3w, \\ -w(1+3w) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 - 3w, \\ 3w^2 + w - 4 = 0. \end{cases}$$

   Из второго уравнения последней системы находим, что $w = 1$ (и тогда $u = -4$) или $w = -\frac{4}{3}$ (и тогда $u = 3$). Возвращаемся к исходным переменным.

   Если $u = 3$, $w = -\frac{4}{3}$, то $\begin{cases} x + 3y = 3, \\ xy = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 3y, \\ y^2 - y - \frac{4}{9} = 0. \end{cases}$ Значит, $y = \frac{4}{3}$ (при этом $x = -1$) или $y = -\frac{1}{3}$ (при этом $x = 4$).

   Если $u = -4$, $w = 1$, то $\begin{cases} x + 3y = -4, \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 - 3y, \\ 3y^2 + 4y + 1 = 0. \end{cases}$ Значит, $y = -\frac{1}{3}$ (при этом $x = -3$) или $y = -1$ (при этом $x = -1$).

3. Хорды AB и CD окружности центром O имеют длину 5. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P, причем $DP = 13$. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L. Найдите отношение $AL : LC$.

   Ответ: $AL : LC = 13 : 18$.

   Решение. Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому $OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно; отсюда следует, что $AN = DH$ и поэтому $AP = DP = 13$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, получаем, что $\frac{AL}{LC} = \frac{PA}{PC} = \frac{PA}{PD+DC} = \frac{13}{18}$.

4. Есть 294 различные карточки с числами $7,\ 11,\ 7^2,\ 11^2, \ldots, 7^{147},\ 11^{147}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа?

Ответ: 15 987.

Решение. Чтобы получить квадрат натурального числа, необходимо и достаточно, чтобы каждый множитель входил в разложение числа на простые множители в чётной степени.

Допустим, выбраны две карточки со степенями семёрки. У нас есть 73 чётных показателя $(2, 4, 6, \ldots, 146)$ и 74 нечётных показателя $(1, 3, 5, \ldots, 147)$. Нам нужно, чтобы сумма показателей оказалась чётной. Чтобы сумма двух натуральных чисел оказалась чётной, мы можем либо выбрать два чётных числа $\left(C_{73}^2 = \frac{73\cdot 72}{2} = 2628 \text{ способов}\right)$, либо два нечётных числа $\left(C_{74}^2 = \frac{74\cdot 73}{2} = 2701 \text{ способов}\right)$. Получаем $2628 + 2701 = 5329$ способов.

Количество способов, когда на обеих выбранных карточках написаны степени числа 11, точно такое же, т.е. 5329.

Если взята одна карточка со степенью семёрки и одна карточка со степенью числа 11, то оба показателя должны быть чётными – получаем $73 \cdot 73 = 5329$ способов.

Итого: $5329 \cdot 3 = 15\,987$ способов.

5. В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \parallel B_1D_1$, $BD \parallel A_1C_1$. Найдите отношение площадей $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 24$, $BC = 10$.

Ответ: $\frac{289}{338}$ или $\frac{1}{2}$.

Решение. Проведём через центр окружности O прямую, перпендикулярную основаниям трапеции. Пусть она пересекает AD и BC в точках N и M соответственно. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, $BM = MC = 5$, $AN = ND = 12$. По теореме Пифагора из треугольников OND и OMC находим, что $ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = 5$, $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 12$. Возможны два случая.

1) Точка O не лежит на отрезке MN. Тогда высота трапеции есть $MN = OM - ON = 7$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на основание AD. Так как трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная, $DH = \frac{AD+BC}{2} = 17$. Тогда $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}$. Площадь любого четырёхугольника равна полупроизведению диагоналей, умноженному на синус угла между ними. В силу того, что диагонали прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ параллельны диагоналям трапеции $ABCD$, угол между ними равен углу между диагоналями трапеции. Обозначим этот угол через ψ. Кроме того диагонали прямоугольника, вписанного в окружность, являются его диаметрами, поэтому $A_1C_1 = B_1D_1 = 26$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\psi = 169\sin\psi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\psi = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 26 \sin\psi = 338\sin\psi$. Значит, отношение площадей равно $\frac{169\sin\psi}{338\sin\psi} = \frac{1}{2}$.

2) Точка O лежит на отрезке MN. Тогда $MN = ON + OM = 17$. Аналогично первому случаю находим, что $DH = 17$, $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = 17\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\varphi = 289\sin\varphi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 26 \sin\varphi = 338\sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями трапеции. Отсюда отношение площадей есть $\frac{289\sin\varphi}{338\sin\varphi} = \frac{289}{338}$.

6. При каких значениях параметра a среди решений неравенства $\left(x^2 - ax + 2x - 2a\right)\sqrt{5-x} \leqslant 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 5?

Ответ: $a \in (-\infty; -7] \cup [0; +\infty)$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условием $x \leqslant 5$. Раскладывая квадратный трёхчлен в скобках на множители (например, методом группировки), получаем $(x+2)(x-a)\sqrt{5-x} \leqslant 0$. Будем решать это неравенство методом интервалов. Для того, чтобы расположить точки, в которых левая часть неравенства обращается в ноль, на числовой прямой, необходимо рассмотреть несколько случаев.

1) $a > 5$. Тогда множитель $(x-a)$ отрицателен на ОДЗ, и его можно отбросить, поменяв знак неравенства. Получаем $(x+2)\sqrt{5-x} \geqslant 0$, $x \in [-2; 5]$. Очевидно, на этом промежутке есть точки, находящиеся на расстоянии 4 друг от друга (например, $x = -4$ и $x = 0$). Все значения $a < -5$ удовлетворяют условию задачи.

2) $a = 5$. Неравенство принимает вид $(x+2)(x-5)\sqrt{5-x} \leqslant 0$, что равносильно неравенству, полученному в предыдущем случае. Значит, $a = 5$ подходит.

3) $-2 < a < 5$. Тогда получаем $x \in [-2; a] \cup \{5\}$. Если $a \geqslant 0$, то в этом множестве есть точки на расстоянии 4 друг от друга ($x = 0$ и $x = 5$); если $a < 0$, то таких точек нет. Значит, в этом случае подходят значения $a \in [0; 5)$.

4) $a = -2$. Неравенство принимает вид $(x+2)^2\sqrt{5-x} \leqslant 0$ и выполняется только при $x = -2$ и $x = 5$. Этот случай не подходит.

5) $a < -2$. Тогда $x \in [a; -2] \cup \{5\}$, и решения на расстоянии, равном 5, есть при $a \leqslant -7$.

Объединяя результаты всех рассмотренных случаев, получаем $a \in (-\infty; -7] \cup [0; +\infty)$.

7. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y + x \geqslant |x - y|, \\ \frac{x^2 - 8x + y^2 + 6y}{x + 2y - 8} \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

Ответ: 8.

Решение. Первое неравенство равносильно[2] системе $\begin{cases} x - y \leqslant x + y, \\ x - y \geqslant -x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$.

Рассмотрим второе неравенство. Его можно записать в виде $\frac{(x-4)^2 + (y+3)^2 - 25}{x + 2y - 8} \leqslant 0$. Числитель дроби в левой части неравенства обращается в 0 на окружности радиуса 5 с центром в точке $Q(4; -3)$ (назовём её ω). Знаменатель дроби равен нулю на прямой $y = 4 - \frac{x}{2}$ (назовём её ℓ). Точки пересечения окружности и прямой определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} x = 8 - 2y, \\ x^2 - 8x + y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 2y, \\ (8 - 2y)^2 - 8(8 - 2y) + y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - 2y, \\ y^2 - 2y = 0, \end{cases}$$

откуда получаем две точки $A(4; 2)$ и $B(8; 0)$. Обозначим также начало координат через O, а точку пересечения прямой ℓ с осью Oy через C (несложно определить, что координаты точки C – это $(0; 4)$).

Неравенство выполняется:

– во всех точках окружности ω кроме точек A и B (тогда числитель дроби равен нулю);

– внутри окружности ω в точках, расположенных выше прямой ℓ (числитель отрицателен, а знаменатель положителен);

– вне окружности ω в точках, расположенных ниже прямой ℓ (числитель положителен, а знаменатель отрицателен).

Опишем множество точек M, которые удовлетворяют исходной системе неравенств. Оно состоит из сегмента окружности, ограниченного хордой AB и находящегося сверху от этой хорды, а также криволинейного треугольника AOC, границами которого являются дуга AO окружности ω и отрезки AC и CO (при этом точки прямой ℓ множеству не принадлежат, а остальные точки границы – принадлежат).

Заметим, что в силу симметрии сегмент окружности, расположенный выше хорды AB, равен сегменту окружности, расположенному выше хорды AO. Значит, площадь фигуры M равна площади треугольника ACO, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

---

[2] $|A| \leqslant B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B. \end{cases}$

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(4 балла)** Выведена формула для расстояния между точками пересечения прямой и параболы 1 балл;

   получена система уравнений относительно неизвестных коэффициентов .... 1 балл;

   найдены неизвестные коэффициенты .... 1 балл;

   при решении системы потеряно одно из значений углового коэффициента прямой снять 1 балл;

   вместо расстояния между точками рассматривается расстояние между проекциями точек на ось абсцисс .... 0 баллов за задачу.

2. **(4 балла)** Выполнена замена переменных (как в решении или аналогичная ей) .... 1 балл;

   система уравнений решена относительно новых переменных .... 1 балл;

   за рассмотрение каждого из двух вариантов значений (u, w) .... по 1 баллу.

3. **(3 балла)** Доказано, что треугольник BCP равнобедренный .... 1 балл;

   доказано, что PL – биссектриса угла APC .... 1 балл.

4. **(5 баллов)** Найдено количество способов, когда на карточках степени разных простых чисел 2 балла;

   найдено количество способов, когда на карточках степени одного простого числа .....3 балла;

   неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев, учтены не все случаи или некоторые наборы учтены более одного раза .... не более 3 баллов за задачу;

   если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 2 раза больше указанного в решении) .... баллы не снимаются;

   ответ не приведён к числовому .... баллы не снимать;

   если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт (например, вместо $\frac{n(n+1)}{2}$ берётся $n(n+1)$ .... 0 баллов за рассматриваемый случай.

5. **(5 баллов)** Полностью рассмотрен только один из двух возможных случаев .... 3 балла;

   промежуточные оценки в случае отсутствия полного решения (ставятся только один раз, даже если вычисления проведены верно в обоих случаях):

   – найдена площадь трапеции .... 1 балл;

   – найден угол между диагоналями прямоугольника .... 1 балл.

6. **(5 баллов)** Квадратный трёхчлен в скобках разложен на множители .... 1 балл;

   построено множество решений данного неравенства на плоскости “переменная–параметр” 1 балл;

   при решении неравенства не учитывается ОДЗ .... не более 1 балла за задачу (который может быть поставлен за разложение на множители квадратного трёхчлена в скобках).

   Ответ отличается от верного конечным числом точек .... снять 1 балл за одну лишнюю/недостающую точку; снять 2 балла за более чем одну лишнюю/недостающую точку).

7. **(6 баллов)** Построено множество точек . . . . 4 балла;

   если при этом неверно учтена граница множества (т.е. либо не исключены участки границы, на которых знаменатель обращается в 0, либо исключены участки границы, в которых числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, либо невозможно понять, какие из границ принадлежат множеству) . . . . снять 1 балл;

   найдена площадь фигуры . . . . 2 балла (эти баллы ставятся только в том случае, если множество точек построено верно или отличается от верного лишь некоторым количеством граничных точек).

   За неполное построение множества возможны частичные баллы:

   определено множество решений первого неравенства . . . . 1 балл;

   построены множества точек, в которых числитель и знаменатель дроби второго неравенства обращаются в ноль . . . . 1 балл;

   определены области плоскости, удовлетворяющие второму неравенству . . . . . 1 балл (этот балл суммируется с предыдущим).