Решения, Долгопрудный, вариант **Ш**

1. Решите уравнение $\cos^2 2x + \cos^2 4x = 1 + \operatorname{ctg} 6x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:
$\frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} = 1 + \frac{\cos 6x}{\sin 6x}$, $\quad \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 8x) = \frac{\cos 6x}{\sin 6x}$, $\quad \cos 6x \cdot \cos 2x = \frac{\cos 6x}{\sin 6x}$.
Получаем два варианта:

а) $\cos 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z$ (при этом условие $\sin 6x \neq 0$ выполняется);

б) $\cos 2x \cdot \sin 6x = 1$. Это уравнение не имеет решений, так как при $|\cos 2x| = 1$ получаем, что $\sin 2x = 0$, $\sin 6x = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x = 0$.

2. Решите неравенство $\frac{x\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{x^2-4x+5}} \leq 1$.

Ответ: $x \in [-5; 2) \cup (2; +\infty)$.

Решение. Заметим, что знаменатель неравенства неположителен при всех x. Поэтому неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x\sqrt{2}+1 \geq 1-\sqrt{x^2-4x+5}, \\ 1-\sqrt{x^2-4x+5} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-4x+5} \geq -x\sqrt{2}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы. Если $x \geq 0$, то оно выполняется. Если $x < 0$, то возводим обе части в квадрат и получаем $x^2 - 4x + 5 \geq 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1]$. С учётом условия $x < 0$ получаем $-5 \leq x < 0$. Таким образом, первое неравенство системы выполняется при $x \geq -5$.

Учитывая, что $x \neq 2$, получаем $x \in [-5; 2) \cup (2; +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 6x - 4y - 13, \\ x^2 + y^2 - 4a^2 \leq 8y - 10x + 4a - 40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a = -\frac{11}{3}, a = 3$.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq a^2, \\ (x+5)^2 + (y-4)^2 \leq (2a+1)^2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $A(3; -2)$ радиуса $|a|$. Второе неравенство задаёт круг с центром $B(-5; 4)$ радиуса $|2a+1|$. Границы кругов включаются; при $a = 0$ и $a = -1/2$ один из кругов вырождается в точку.

Система неравенств имеет единственное решение, когда круги касаются внешним образом, то есть, когда сумма радиусов равна расстоянию между центрами $AB = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$. Получаем уравнение $|a| + |2a+1| = 10$, решая которое, находим, что $a = -\frac{11}{3}$ или $a = 3$.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружностью – A и B, с большей окружностью – C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = \frac{24}{5}$, $AC = 12$.

Ответ: $r = 3$, $R = 12$.

Решение. Введём обозначения: O – центр меньшей окружности, Q – центр большей окружности, r – радиус меньшей окружности, R – радиус большей окружности, $OQ \cap AB = H$, $\angle CQO = \angle AOH = \alpha$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $OACQ$. $OA = r$, $OQ = R + r$, $CQ = R$, $AC = 12$. Из точки O опустим перпендикуляр OE на отрезок CQ. Из прямоугольного треугольника OEQ по теореме Пифагора получаем, что $(R+r)^2 - (R-r)^2 = 12^2$, $Rr = 36$. $\sin\alpha = \dfrac{AC}{OQ} = \dfrac{12}{R+r}$.

Из треугольника AOH получаем, что $OA\sin\alpha = AH$, или, используя введённые обозначения: $r \cdot \dfrac{12}{R+r} = \dfrac{12}{5}$.

Решая полученные уравнения, находим, что $r = 3$, $R = 12$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[618222;\ 618252]$ могли получиться в результате вычитания?

Ответ: 618228, 618237, 618246.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} - \overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} = (10x + F) - (100000F + x) = 9x - 99999F$. Таким образом, полученная разность делится на 9. Из промежутка $[618222;\ 618252]$ на 9 делятся числа 618228, 618237, 618246.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате вычитания. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$9x - 99999F = 618228\ ,$$
$$9x - 99999F = 618237\ ,$$
$$9x - 99999F = 618246$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F = 1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x = 79803$, $F = 1$; второму – пара $x = 79804$, $F = 1$; третьему – пара $x = 79805$, $F = 1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 798031, 798041, 798051, то в результате перестановки и вычитания мы получим числа 61828, 618237, 618246.

6. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка M так, что центр сферы, описанной около пирамиды MAA_1B_1B, лежит в грани AA_1B_1B. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $MABC$, равен 5, а ребро основания призмы равно $4\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды MAA_1B_1B к объёму призмы;

б) длину отрезка MC;

в) площадь полной поверхности призмы.

Ответ: а) $V_{MAA_1B_1B} : V = 2:3$, б) $MC = 6$, в) $S = 144\sqrt{3}$.

Решение. Введём обозначения: K – центр грани ABC; L – середина ребра AB; Q – центр сферы, описанной около пирамиды MAA_1B_1B (т.е. Q – центр грани AA_1B_1B); O – центр сферы, описанной около пирамиды $MABC$.

а) $\dfrac{V_{MABC}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{MC}{CC_1}$; $\dfrac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{MC_1}{CC_1}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{V_{MABC} + V_{MA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{MC + MC_1}{CC_1} = \dfrac{1}{3}$. Значит, объём пирамиды MAA_1B_1B составляет две трети объёма призмы.

б) Сторона равностороннего треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$, следовательно, $CL = 6$, $CK = 4$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $CKOM$. В ней известны стороны $CK = 4$, $OM = 5$ и диагональ $OC = 5$. По теореме Пифагора из треугольника OCK находим, что $OK = 3$. Опустим из точки O перпендикуляр OH на отрезок MC. Тогда $MC = 2 \cdot CH = 2 \cdot KO = 6$.

в) Обозначим $BB_1 = h$. Тогда $QL = \frac{h}{2}$, $QB = \sqrt{\frac{h^2}{4} + 12}$, $QM = \sqrt{CL^2 + (QL - MC)^2} = \sqrt{\left(\frac{h}{2} - 6\right)^2 + 36}$.

Отрезки QB и QM равны как радиусы сферы. Решая получающееся уравнение, находим, что $h = 10$. Тогда площадь поверхности призмы $S = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 3 \cdot 10 \cdot 4\sqrt{3} = 144\sqrt{3}$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4y^2 - 15xy + 14x^2 + 12y - 24x = 0, \\ \sqrt{x(12 - 7x + 4y) + 36} + \sqrt{x^2 + 8x + 32} = 6. \end{cases}$

Ответ: $(-7; -14), (-4; -8)$.

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде $4y^2 - (15x - 12)y + (14x^2 - 24x) = 0$ и решим его как квадратное уравнение относительно y. Получаем, что $y = 2x$ или $y = \frac{7x - 12}{4}$.

При $y = 2x$ второе уравнение системы принимает вид $\sqrt{x^2 + 12x + 36} + \sqrt{x^2 + 8x + 32} = 6 \Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2 + 8x + 32} = 6 - |x + 6|$. Если $x \geq -6$, то получаем уравнение $\sqrt{x^2 + 8x + 32} = -x$, решая которое, находим, что $x = -4$. Если $x < -6$, то получаем уравнение $\sqrt{x^2 + 8x + 32} = 12 + x$, решая которое, находим, что $x = -7$.

При $y = \frac{7x - 12}{4}$ второе уравнение системы принимает вид $6 + \sqrt{x^2 + 8x + 32} = 6 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 32 = 0$, следовательно, в этом случае решений нет.

8. Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leq a \leq 700$, $1 \leq b \leq 700$, сумма $a + b$ делится на 7, а произведение ab делится на 5. (При $a \neq b$ пары $(a; b)$ и $(b; a)$ считаются различными.)

Ответ: 25200.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть a делится на 5 (на отрезке $[1; 700]$ имеется $700 : 5 = 140$ таких значений a). Для каждого такого значения a подходят те и только те значения b, при которых сумма остатков от деления a на 7 и b на 7 равна 0 или 7. То есть, подходит каждое седьмое значение b. Итого, для каждого значения a получаем по 100 вариантов.

2) Пусть a не делится на 5 (на отрезке $[1; 700]$ имеется $700 - 140 = 560$ таких значений a). Для каждого такого a подходят те и только те значения b, кратные 5, при которых сумма остатков от деления a на 7 и b на 7 равна 0 или 7. То есть, подходит одно из каждых $5 \cdot 7 = 35$ значений b. Итого, для каждого значения a получаем по 20 вариантов.

Суммируем количество пар: $100 \cdot 140 + 560 \cdot 20 = 25200$.

Решения, Долгопрудный, вариант **И**

1. Решите уравнение $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1 + \operatorname{ctg} 3x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:
$\frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 2x}{2} = 1 + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$, $\quad -\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$, $\quad -\cos 3x \cdot \cos x = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$.
Получаем два варианта:

а) $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$ (при этом условие $\sin 3x \neq 0$ выполняется);

б) $\cos x \cdot \sin 3x = -1$. Это уравнение не имеет решений, так как при $|\cos x| = 1$ получаем, что $\sin x = 0$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 0$.

2. Решите неравенство $\frac{3x+3}{3-\sqrt{x^2-2x+10}} \leq 1$.

Ответ: $x \in [-5/4; 1) \cup (1; +\infty)$.

Решение. Заметим, что знаменатель неравенства неположителен при всех x. Поэтому неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 3x+3 \geq 3-\sqrt{x^2-2x+10}, \\ 3-\sqrt{x^2-2x+10} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2x+10} \geq -3x, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы. Если $x \geq 0$, то оно выполняется. Если $x < 0$, то возводим обе части в квадрат и получаем $x^2 - 2x + 10 \geq 9x^2 \Leftrightarrow 8x^2 + 2x - 10 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-5/4; 1]$. С учётом условия $x < 0$ получаем $-5/4 \leq x < 0$. Таким образом, первое неравенство системы выполняется при $x \geq -5/4$.

Учитывая, что $x \neq 1$, получаем $x \in [-5/4; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 2x - 4y - 5, \\ x^2 + y^2 - 9a^2 \leq 8y - 14x - 61 + 12a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a = -3, a = 2$.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq a^2, \\ (x+7)^2 + (y-4)^2 \leq (3a+2)^2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $A(1; -2)$ радиуса $|a|$. Второе неравенство задаёт круг с центром $B(-7; 4)$ радиуса $|3a+2|$. Границы кругов включаются; при $a = 0$ и $a = -2/3$ один из кругов вырождается в точку.

Система неравенств имеет единственное решение, когда круги касаются внешним образом, то есть, когда сумма радиусов равна расстоянию между центрами $AB = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$. Получаем уравнение $|a| + |3a+2| = 10$, решая которое, находим, что $a = -3$ или $a = 2$.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные KL и MN. Их точки касания с меньшей окружностью – L и M, с большей окружностью – K и N. Известно, что $KN = \frac{64}{5}$, $MN = 8$. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: $r = 2$, $R = 8$.

Решение. Введём обозначения: O – центр большей окружности, Q – центр меньшей окружности, r – радиус меньшей окружности, R – радиус большей окружности, $OQ \cap KN = H$, $\angle KOH = \alpha$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ONMQ$. $QM = r$, $OQ = R + r$, $ON = R$, $MN = 8$. Из точки Q опустим перпендикуляр QE на отрезок ON. Из прямоугольного треугольника OEQ по теореме Пифагора получаем, что $(R+r)^2 - (R-r)^2 = 8^2$, $Rr = 16$. $\sin\alpha = \frac{MN}{OQ} = \frac{8}{R+r}$.

Из треугольника NOH получаем, что $ON \cdot \sin\alpha = AH$, или, используя введённые обозначения: $R \cdot \frac{8}{R+r} = \frac{32}{5}$.

Решая полученные уравнения, находим, что $r = 2$, $R = 8$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[429454;\, 429488]$ могли получиться в результате вычитания?

Ответ: 429462, 429471, 429480.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} - \overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} = (10x + F) - (100000F + x) = 9x - 99999F$. Таким образом, полученная разность делится на 9. Из промежутка $[429454;\, 429488]$ на 9 делятся числа 429462, 429471, 429480.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате вычитания. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$9x - 99999F = 429462\,,$$
$$9x - 99999F = 429471\,,$$
$$9x - 99999F = 429480$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F = 1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x = 58829$, $F = 1$; второму – пара $x = 58830$, $F = 1$; третьему – пара $x = 58831$, $F = 1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 588291, 588301, 588311, то в результате перестановки и вычитания мы получим числа 429462, 429471, 429480.

6. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка Q так, что центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1C, лежит в грани AA_1C_1C. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $QABC$, равен 2, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды QAA_1C_1C к объёму призмы;

б) длину отрезка QB;

в) объём призмы.

Ответ: а) $V_{QAA_1C_1C} : V = 2:3$, б) $BQ = 2\sqrt{3}$, в) $V = \frac{81}{16}$.

Решение. Введём обозначения: K – центр грани ABC; L – середина ребра AC; P – центр сферы, описанной около пирамиды QAA_1C_1C (т.е. P – центр грани AA_1C_1C); O – центр сферы, описанной около пирамиды $QABC$.

а) $\frac{V_{QABC}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{QB}{BB_1}$; $\frac{V_{QA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{QB_1}{BB_1}$ $\Rightarrow$ $\frac{V_{QABC} + V_{QA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{QB + QB_1}{BB_1} = \frac{1}{3}$. Значит, объём пирамиды QAA_1C_1C составляет две трети объёма призмы.

б) Сторона равностороннего треугольника ABC равна $\sqrt{3}$, следовательно, $BL = \frac{3}{2}$, $BK = 1$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $BKOQ$. В ней известны стороны $BK=1$, $OQ=2$ и диагональ $OB=2$. По теореме Пифагора из треугольника OKB находим, что $OK=\sqrt{3}$. Опустим из точки O перпендикуляр OH на отрезок QB. Тогда $QB=2\cdot HB=2\cdot KO=2\sqrt{3}$.

в) Обозначим $CC_1=h$. Тогда $PL=\frac{h}{2}$, $PC=\sqrt{\frac{h^2}{4}+\frac{3}{4}}$, $QP=\sqrt{BL^2+(PL-BQ)^2}=\sqrt{\left(\frac{h}{2}-2\sqrt{3}\right)^2+\frac{9}{4}}$.

Отрезки PC и QP равны как радиусы сферы. Решая получающееся уравнение, находим, что $h=\frac{9\sqrt{3}}{4}$. Тогда объём призмы $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{81}{16}$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 21x^2-13xy+2y^2+42x-14y=0, \\ \sqrt{x(7x-2y+14)+49}+\sqrt{x^2+5x+12}=7. \end{cases}$

Ответ: $\left(-\frac{12}{5};-\frac{36}{5}\right),(-8;-24)$.

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде $2y^2-(13x-14)y+\left(21x^2+42x\right)=0$ и решим его как квадратное уравнение относительно y. Получаем, что $y=3x$ или $y=\frac{7x+14}{2}$.

При $y=3x$ второе уравнение системы принимает вид $\sqrt{x^2+14x+49}+\sqrt{x^2+5x+12}=7$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2+5x+12}=7-|x+7|$. Если $x\geq-7$, то получаем уравнение $\sqrt{x^2+5x+12}=-x$, решая которое, находим, что $x=-\frac{12}{5}$. Если $x<-7$, то получаем уравнение $\sqrt{x^2+5x+12}=14+x$, решая которое, находим, что $x=-8$.

При $y=\frac{7x+14}{2}$ второе уравнение системы принимает вид $7+\sqrt{x^2+5x+12}=7\Leftrightarrow x^2+5x+12=0$, следовательно, в этом случае решений нет.

8. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1\leq a\leq 600$, $1\leq b\leq 600$, сумма $a+b$ делится на 8, а произведение ab делится на 3. (При $a\neq b$ пары $(a;b)$ и $(b;a)$ считаются различными.)

Ответ: 25000.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть a делится на 3 (на отрезке $[1;600]$ имеется $600:3=200$ таких значений a). Для каждого такого значения a подходят те и только те значения b, при которых сумма остатков от деления a на 8 и b на 8 равна 0 или 8. То есть, подходит каждое восьмое значение b. Итого, для каждого значения a получаем по 75 вариантов.

2) Пусть a не делится на 3 (на отрезке $[1;700]$ имеется $600-200=400$ таких значений a). Для каждого такого a подходят те и только те значения b, кратные 3, при которых сумма остатков от деления a на 8 и b на 8 равна 0 или 8. То есть, подходит одно из каждых $3\cdot 8=24$ значений b. Итого, для каждого значения a получаем по 25 вариантов.

Суммируем количество пар: $200\cdot 75+400\cdot 25=25000$.

Решения, Долгопрудный, вариант **Ф**

1. Решите уравнение $\cos^2 2x + \cos^2 x = 1 + \operatorname{ctg} 3x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:
$\frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 2x}{2} = 1 + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$, $\quad \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$, $\quad \cos 3x \cdot \cos x = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$.
Получаем два варианта:

а) $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$ (при этом условие $\sin 3x \neq 0$ выполняется);

б) $\cos x \cdot \sin 3x = 1$. Это уравнение не имеет решений, так как при $|\cos x| = 1$ получаем, что $\sin x = 0$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 0$.

2. Решите неравенство $\frac{x\sqrt{5}+1}{1-\sqrt{x^2-2x+2}} \leq 1$.

Ответ: $x \in [-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Решение. Заметим, что знаменатель неравенства неположителен при всех x. Поэтому неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x\sqrt{5}+1 \geq 1-\sqrt{x^2-2x+2}, \\ 1-\sqrt{x^2-2x+2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2x+2} \geq -x\sqrt{5}, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы. Если $x \geq 0$, то оно выполняется. Если $x < 0$, то возводим обе части в квадрат и получаем $x^2 - 2x + 2 \geq 5x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$. С учётом условия $x < 0$ получаем $-1 \leq x < 0$. Таким образом, первое неравенство системы выполняется при $x \geq -1$.
Учитывая, что $x \neq 1$, получаем $x \in [-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 4y - 2x - 5, \\ x^2 + y^2 - 4a^2 \leq 10x - 12y + 12a - 52 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a = -\frac{13}{3}, a = \frac{7}{3}$.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq a^2, \\ (x-5)^2 + (y+6)^2 \leq (2a+3)^2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $A(-1; 2)$ радиуса $|a|$. Второе неравенство задаёт круг с центром $B(5; -6)$ радиуса $|2a+3|$. Границы кругов включаются; при $a = 0$ и $a = -\frac{3}{2}$ один из кругов вырождается в точку.

Система неравенств имеет единственное решение, когда круги касаются внешним образом, то есть, когда сумма радиусов равна расстоянию между центрами $AB = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$. Получаем уравнение $|a| + |2a+3| = 10$, решая которое, находим, что $a = -\frac{13}{3}$ или $a = \frac{7}{3}$.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные PS и QT. Их точки касания с меньшей окружностью – S и T, с большей окружностью – P и Q. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $PQ = \frac{12\sqrt{6}}{5}$, $QT = 2\sqrt{6}$.

Ответ: $r=2$, $R=3$.

Решение. Введём обозначения: A – центр большей окружности, B – центр меньшей окружности, r – радиус меньшей окружности, R – радиус большей окружности, $AB\cap PQ=H$, $\angle QAH=\alpha$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABTQ$. $BT=r$, $AB=R+r$, $AQ=R$, $QT=2\sqrt{6}$. Из точки B опустим перпендикуляр BE на отрезок AQ. Из прямоугольного треугольника ABE по теореме Пифагора получаем, что $(R+r)^2-(R-r)^2=\left(2\sqrt{6}\right)^2$, $Rr=6$. $\sin\alpha=\dfrac{TQ}{AB}=\dfrac{2\sqrt{6}}{R+r}$.

Из треугольника AQH получаем, что $AQ\cdot\sin\alpha=QH$, или, используя введённые обозначения: $R\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{R+r}=\dfrac{6\sqrt{6}}{5}$.

Решая полученные уравнения, находим, что $r=2$, $R=3$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[382340;\ 382371]$ могли получиться в результате вычитания?

Ответ: 382347, 382356, 382365.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}-\overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}=(10x+F)-(100000F+x)=9x-99999F$. Таким образом, полученная разность делится на 9. Из промежутка $[382340;\ 382371]$ на 9 делятся числа 382347, 382356, 382365.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате вычитания. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$9x-99999F=382347,$$
$$9x-99999F=382356,$$
$$9x-99999F=382365$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F=1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x=53594$, $F=1$; второму – пара $x=53595$, $F=1$; третьему – пара $x=53596$, $F=1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 535941, 535951, 535961, то в результате перестановки и вычитания мы получим числа 382347, 382356, 382365.

6. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка S так, что центр сферы, описанной около пирамиды SAA_1B_1B, лежит в грани AA_1B_1B. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$, равен $\sqrt{2}$, а ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды SAA_1B_1B к объёму призмы;

б) длину отрезка SC;

в) площадь полной поверхности призмы.

Ответ: а) $V_{SAA_1B_1B}:V=2:3$, б) $SC=2$, в) $S=\dfrac{39\sqrt{3}}{4}$.

Решение. Введём обозначения: K – центр грани ABC; L – середина ребра AB; Q – центр сферы, описанной около пирамиды SAA_1B_1B (т.е. Q – центр грани AA_1B_1B); O – центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$.

а) $\dfrac{V_{SABC}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{SC}{CC_1}$; $\dfrac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{SC_1}{CC_1}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{V_{SABC}+V_{SA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{SC+SC_1}{CC_1}=\dfrac{1}{3}$. Значит, объём пирамиды SAA_1B_1B составляет две трети объёма призмы.

б) Сторона равностороннего треугольника ABC равна $\sqrt{3}$, следовательно, $CL=\frac{3}{2}$, $CK=1$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $CKOM$. В ней известны стороны $CK=1$, $OS=\sqrt{2}$ и диагональ $OC=\sqrt{2}$. По теореме Пифагора из треугольника OCK находим, что $OK=1$. Опустим из точки O перпендикуляр OH на отрезок SC. Тогда $SC=2\cdot CH=2\cdot KO=2$.

в) Обозначим $BB_1=h$. Тогда $QL=\frac{h}{2}$, $QB=\sqrt{\frac{h^2}{4}+\frac{3}{4}}$, $QS=\sqrt{CL^2+(QL-SC)^2}=\sqrt{\left(\frac{h}{2}-2\right)^2+\frac{9}{4}}$. Отрезки QB и SQ равны как радиусы сферы. Решая получающееся уравнение, находим, что $h=\frac{11}{4}$. Тогда площадь поверхности призмы $S=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2+3\cdot\frac{11}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2-19xy+45y^2-12x+60y=0,\\ \sqrt{y(2x-9y-12)+36}+\sqrt{y^2-5y+11}=6.\end{cases}$

Ответ: $(35;7),\left(11;\frac{11}{5}\right)$.

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде $2x^2-(19y+12)y+\left(45y^2+60y\right)=0$ и решим его как квадратное уравнение относительно x. Получаем, что $x=5y$ или $x=\frac{9y+12}{2}$.

При $x=5y$ второе уравнение системы принимает вид $\sqrt{y^2-12y+36}+\sqrt{y^2-5y+11}=6 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-5y+11}=6-|y-6|$. Если $y\geq 6$, то получаем уравнение $\sqrt{y^2-5y+11}=12-y$, решая которое, находим, что $y=7$. Если $y<6$, то получаем уравнение $\sqrt{y^2-5y+11}=y$, решая которое, находим, что $y=\frac{11}{5}$.

При $x=\frac{9y+12}{2}$ второе уравнение системы принимает вид $6+\sqrt{y^2-5y+11}=6 \Leftrightarrow y^2-5y+11=0$, следовательно, в этом случае решений нет.

8. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1\leq a\leq 840$, $1\leq b\leq 840$, сумма $a+b$ делится на 6, а произведение ab делится на 7. (При $a\neq b$ пары $(a;b)$ и $(b;a)$ считаются различными.)

Ответ: 31200.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть a делится на 7 (на отрезке $[1;840]$ имеется $840:7=120$ таких значений a). Для каждого такого значения a подходят те и только те значения b, при которых сумма остатков от деления a на 6 и b на 6 равна 0 или 6. То есть, подходит каждое шестое значение b. Итого, для каждого значения a получаем по 140 вариантов.
2) Пусть a не делится на 7 (на отрезке $[1;840]$ имеется $840-120=720$ таких значений a). Для каждого такого a подходят те и только те значения b, кратные 7, при которых сумма остатков от деления a на 6 и b на 6 равна 0 или 6. То есть, подходит одно из каждых $7\cdot 6=42$ значений b. Итого, для каждого значения a получаем по 20 вариантов.

Суммируем количество пар: $120\cdot 140+720\cdot 20=31200$.

Решения, Долгопрудный, вариант **Р**

1. Решите уравнение $\sin^2 2x+\sin^2 4x=1+\operatorname{ctg}6x$.

Ответ: $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}, k\in Z$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:
$\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=1+\frac{\cos 6x}{\sin 6x}$, $\quad -\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 8x)=\frac{\cos 6x}{\sin 6x}$, $\quad -\cos 6x\cdot\cos 2x=\frac{\cos 6x}{\sin 6x}$.
Получаем два варианта:

а) $\cos 6x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}, k\in Z$ (при этом условие $\sin 6x\neq 0$ выполняется);

б) $\cos 2x\cdot\sin 6x=-1$. Это уравнение не имеет решений, так как при $|\cos 2x|=1$ получаем, что $\sin 2x=0$, $\sin 6x=3\sin 2x-4\sin^3 2x=0$.

2. Решите неравенство $\frac{2x+8}{8-\sqrt{x^2-2x+65}}\leq 1$.

Ответ: $x\in[-5;1)\cup(1;+\infty)$.

Решение. Заметим, что знаменатель неравенства неположителен при всех x. Поэтому неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 2x+8\geq 8-\sqrt{x^2-2x+65}, \\ 8-\sqrt{x^2-2x+65}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2x+65}\geq -2x, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы. Если $x\geq 0$, то оно выполняется. Если $x<0$, то возводим обе части в квадрат и получаем $x^2-2x+65\geq 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2+2x-65\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-5;\frac{13}{3}\right]$. С учётом условия $x<0$ получаем $-5\leq x<0$. Таким образом, первое неравенство системы выполняется при $x\geq -5$.

Учитывая, что $x\neq 1$, получаем $x\in[-5;1)\cup(1;+\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-a^2\leq 4y-6x-13, \\ x^2+y^2-9a^2\leq 10x-8y+6a-40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a=-\frac{11}{4}, a=\frac{9}{4}$.

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x+3)^2+(y-2)^2\leq a^2, \\ (x-5)^2+(y+4)^2\leq (3a+1)^2. \end{cases}$$

Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $A(-3;2)$ радиуса $|a|$. Второе неравенство задаёт круг с центром $B(5;-4)$ радиуса $|3a+1|$. Границы кругов включаются; при $a=0$ и $a=-1/3$ один из кругов вырождается в точку.

Система неравенств имеет единственное решение, когда круги касаются внешним образом, то есть, когда сумма радиусов равна расстоянию между центрами $AB=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$. Получаем уравнение $|a|+|3a+1|=10$, решая которое, находим, что $a=-\frac{11}{4}$ или $a=\frac{9}{4}$.

4. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные CD и EF. Их точки касания с меньшей окружностью – D и E, с большей окружностью – C и F. Известно, что $DE=8$, $EF=20$. Найдите радиусы окружностей.

Ответ: $r=5$, $R=20$.

Решение. Введём обозначения: O – центр большей окружности, Q – центр меньшей окружности, r – радиус меньшей окружности, R – радиус большей окружности, $OQ\bigcap DE=H$, $\angle FOH=\angle EQH=\alpha$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $OFEQ$. $QE=r$, $OQ=R+r$, $OF=R$, $EF=20$. Из точки Q опустим перпендикуляр QT на отрезок OF. Из прямоугольного треугольника OTQ по теореме Пифагора получаем, что $(R+r)^2-(R-r)^2=20^2$, $Rr=100$. $\sin\alpha=\dfrac{EF}{OQ}=\dfrac{20}{R+r}$.

Из треугольника EQH получаем, что $EQ\cdot\sin\alpha=EH$, или, используя введённые обозначения: $r\cdot\dfrac{20}{R+r}=4$.

Решая полученные уравнения, находим, что $r=5$, $R=20$.

5. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 123456 $\to$ 612345), и полученное шестизначное число вычли из исходного числа. Какие числа из промежутка $[584548;\ 584570]$ могли получиться в результате вычитания?

Ответ: 584550, 584559, 584568.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}-\overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}=(10x+F)-(100000F+x)=9x-99999F$. Таким образом, полученная разность делится на 9. Из промежутка $[584548;\ 584570]$ на 9 делятся числа 584550, 584559, 584568.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате вычитания. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$9x-99999F=584550,$$
$$9x-99999F=584559,$$
$$9x-99999F=584568$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F=1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x=76061$, $F=1$; второму – пара $x=76062$, $F=1$; третьему – пара $x=76063$, $F=1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 760611, 760621, 760631, то в результате перестановки и вычитания мы получим числа 584550, 584559, 584568.

6. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбрана точка T так, что центр сферы, описанной около пирамиды TAA_1C_1C, лежит в грани AA_1C_1C. Известно, что радиус сферы, описанной около пирамиды $TABC$, равен $\sqrt{19}$, а ребро основания призмы равно $4\sqrt{3}$. Найдите:

а) отношение объёма пирамиды TAA_1C_1C к объёму призмы;

б) длину отрезка TB;

в) объём призмы.

Ответ: а) $V_{TAA_1C_1C}:V=2:3$, б) $BT=2\sqrt{3}$, в) $V=216$.

Решение. Введём обозначения: K – центр грани ABC; L – середина ребра AC; P – центр сферы, описанной около пирамиды TAA_1C_1C (т.е. P – центр грани AA_1C_1C); O – центр сферы, описанной около пирамиды $TABC$.

а) $\dfrac{V_{TABC}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{TB}{BB_1}$; $\dfrac{V_{TA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{TB_1}{BB_1}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{V_{TABC}+V_{TA_1B_1C_1}}{V_{ABCA_1B_1C_1}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{TB+TB_1}{BB_1}=\dfrac{1}{3}$. Значит, объём пирамиды TAA_1C_1C составляет две трети объёма призмы.

б) Сторона равностороннего треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$, следовательно, $BL=6$, $BK=4$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $BKOT$. В ней известны стороны $BK=4$, $OT=\sqrt{19}$ и диагональ $OB=\sqrt{19}$. По теореме Пифагора из треугольника OKB находим, что $OK=\sqrt{3}$. Опустим из точки O перпендикуляр OH на отрезок TB. Тогда $TB=2\cdot HB=2\cdot KO=2\sqrt{3}$.

в) Обозначим $CC_1=h$. Тогда $PL=\frac{h}{2}$, $PC=\sqrt{\frac{h^2}{4}+12}$, $PT=\sqrt{BL^2+(PL-BT)^2}=\sqrt{\left(\frac{h}{2}-2\sqrt{3}\right)^2+36}$.

Отрезки PC и PT равны как радиусы сферы. Решая получающееся уравнение, находим, что $h=6\sqrt{3}$. Тогда объём призмы $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(4\sqrt{3}\right)^2\cdot 6\sqrt{3}=216$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x^2+11xy+10y^2+10x+20y=0,\\ \sqrt{25-y(3x+5y+10)}+\sqrt{y^2-10y+30}=5.\end{cases}$

Ответ: $(-14;\,7),(-6;\,3)$.

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде $3x^2+(11y+10)y+\left(10y^2+20y\right)=0$ и решим его как квадратное уравнение относительно x. Получаем, что $x=-2y$ или $x=\frac{-5y-10}{3}$.

При $x=-2y$ второе уравнение системы принимает вид $\sqrt{y^2-10y+25}+\sqrt{y^2-10y+30}=5 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-10y+30}=5-|y-5|$. Если $y\geq 5$, то получаем уравнение $\sqrt{y^2-10y+30}=10-y$, решая которое, находим, что $y=7$. Если $y<5$, то получаем уравнение $\sqrt{y^2-10y+30}=y$, решая которое, находим, что $y=3$.

При $x=\frac{-5y-10}{3}$ второе уравнение системы принимает вид $6+\sqrt{y^2-10y+30}=6 \Leftrightarrow y^2-10y+30=0$, следовательно, в этом случае решений нет.

8. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1\leq a\leq 1100$, $1\leq b\leq 1100$, сумма $a+b$ делится на 4, а произведение ab делится на 11. (При $a\neq b$ пары $(a;b)$ и $(b;a)$ считаются различными.)

Ответ: 52500.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть a делится на 11 (на отрезке $[1;1100]$ имеется $1100:11=100$ таких значений a). Для каждого такого значения a подходят те и только те значения b, при которых сумма остатков от деления a на 4 и b на 4 равна 0 или 4. То есть, подходит каждое четвёртое значение b. Итого, для каждого значения a получаем по 275 вариантов.

2) Пусть a не делится на 11 (на отрезке $[1;1100]$ имеется $1100-100=1000$ таких значений a). Для каждого такого a подходят те и только те значения b, кратные 11, при которых сумма остатков от деления a на 4 и b на 4 равна 0 или 4. То есть, подходит одно из каждых $11\cdot 4=44$ значений b. Итого, для каждого значения a получаем по 25 вариантов.

Суммируем количество пар: $100\cdot 275+1000\cdot 25=52500$.

Решения, выезд, вариант **Ш**

1. Решите неравенство $\log_{1/2}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)-\log_{1/2}\left(\frac{x^2}{2}+4x+9\right)\le 2\log_4\left(x^2+5x+6\right)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup[7+\sqrt{87};+\infty)$

Решение. Находим ОДЗ: $x\in(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$.

Перепишем неравенство в виде $\log_{1/2}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)+\log_{1/2}\left((x+2)(x+3)\right)\le\log_{1/2}\left(\frac{x^2}{2}+4x+9\right)$. На ОДЗ оно равносильно каждому из следующих неравенств:

$\log_{1/2}\left((x+2)(x-5)\right)\le\log_{1/2}\left(\frac{x^2}{2}+4x+9\right)$; $x^2-3x-10\ge\frac{x^2}{2}+4x+9$; $\frac{x^2}{2}-7x-19\ge 0$.

Последнее неравенство имеет решения $x\in(-\infty;7-\sqrt{87}]\cup[7+\sqrt{87};+\infty)$. Пересекая это множество с ОДЗ, получаем ответ.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}\frac{5x}{y}-\frac{9y}{x}+10=\frac{6}{xy},\\ \frac{2x}{y}+\frac{3y}{x}+4=\frac{9}{xy}.\end{cases}$

Ответ: $(1;1),(-1;-1),(3;-1),(-3;1)$.

Решение. Из первого уравнения системы, умноженного на три, вычтем второе уравнение, умноженное на два: $\frac{11x}{y}+\frac{-33y}{x}+22=0$. Обозначим $\frac{x}{y}=t$ и получим уравнение $11t-\frac{33}{t}+22=0$, решая которое, находим, что $t=1$ или $t=-3$.

Если $t=1$, то $x=y$ и получаем две пары чисел $(1;1),(-1;-1)$.

Если $t=-3$, то $x=-3y$ и получаем две пары чисел $(3;-1),(-3;1)$.

3. Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

Ответ: $V=\frac{8a^3}{9\sqrt{3}}$, $\gamma=\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Решение. Пусть PO – высота правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$; K – середина ребра AD. Тогда $PK=a$. Пусть $\angle OKP=\beta$. Тогда $PO=a\sin\beta$, $KO=a\cos\beta$, площадь основания $S_{ABCD}=4a^2\cos^2\beta$, объём пирамиды $V_{PABCD}=\frac{1}{3}\cdot 4a^2\cos^2\beta\cdot a\sin\beta=\frac{4a^3}{3}\left(\sin\beta-\sin^3\beta\right)$.

Обозначим $\sin\beta=t$ и рассмотрим $f(t)=t-t^3$, где $t\in[0;1]$. $f'(t)=1-3t^2=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)$. Поскольку $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$, $f'(t)>0$ при $t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $f'(t)<0$ при $t>\frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем, что функция $f(t)$ достигает своего наибольшего значения при $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляя найденное значение $\sin\beta$ в формулу для объёма пирамиды, получаем $V_{\max}=\frac{8a^3}{9\sqrt{3}}$.

Для нахождения угла между соседними боковыми гранями пирамиды опустим перпендикуляры AH и CH из точек A и C на ребро PD. Тогда $\angle AHC=\gamma$ – искомый угол. Из прямоугольного треугольника POD находим, что его высота $OH=\dfrac{OP\cdot OD}{HP}=\dfrac{a\sin\beta\cdot a\sqrt{2}\cos\beta}{\sqrt{a^2\sin^2\beta+2a^2\cos^2\beta}}=\dfrac{2a}{\sqrt{15}}$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{AO}{OH}=\sqrt{5}$, $\cos\gamma=-\dfrac{2}{3}$.

4. Найдите наименьший корень уравнения $\operatorname{ctg}6x-\operatorname{tg}5x=\dfrac{1}{\cos 5x}$, принадлежащий отрезку $\left[\dfrac{8\pi}{17};\dfrac{40\pi}{17}\right]$.

Ответ: $x=\dfrac{21\pi}{34}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\cos 6x}{\sin 6x}-\frac{\sin 5x}{\cos 5x}=\frac{1}{\cos 5x},\qquad \frac{\cos 6x\cos 5x-\sin 6x\sin 5x}{\sin 6x\cos 5x}=\frac{1}{\cos 5x},\qquad \frac{\cos 11x}{\sin 6x\cos 5x}=\frac{1}{\cos 5x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos 11x=\sin 6x,\\ \sin 6x\cos 5x\neq 0.\end{cases}$

Решаем первое уравнение системы:

$$\cos 11x=\cos\left(6x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}11x=6x-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 11x=-6x+\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Решения первого уравнения совокупности не удовлетворяют условию $\cos 5x\neq 0$, следовательно, они не подходят. Второе уравнение даёт $x=\dfrac{\pi(1+4k)}{34}$. На данный в условии отрезок попадают числа $\dfrac{17\pi}{34},\dfrac{21\pi}{34},\dfrac{25\pi}{34},\ldots$ Первое из них не удовлетворяет условию $\cos 5x\neq 0$ и, следовательно, не является решением уравнения. Число $\dfrac{21\pi}{34}$ удовлетворяет условию $\sin 6x\cos 5x\neq 0$ и является минимальным корнем на данном отрезке.

5. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектриса угла BAD пересекает сторону CD в точке E, а прямую BC – в точке F, причём $AE\perp CD$, $EF=4$. Найдите длины отрезков AE и AD, а также площадь трапеции.

Ответ: $DE=9$, $AD=15$, $S=96$.

Решение. Так как $\angle BFA=\angle FAD=\angle FAB$, то ΔABF равнобедренный, $BF=AB=10$; $CF=AB-BC=5$, $CE=\sqrt{CF^2-EF^2}=3$. Пусть BT – высота треугольника ABF. Тогда из подобия прямоугольных треугольников BTF и CEF следует, что $FT=2\cdot FE=8$.

Далее находим: $AT=TF=8$, $TE=EF=4$, $AE=12$.

Из подобия треугольников AED и CEF ($k=AE:EF=3$) следует, что $AD=15$.

Высота трапеции равна сумме высот треугольников CEF и EAD, проведённых из вершины E. Высота EL треугольника CEF равна $EL=\dfrac{CE\cdot EF}{CF}=\dfrac{3\cdot 4}{5}=\dfrac{12}{5}$. Высота трапеции $h=4\cdot EL=\dfrac{48}{5}$.

Площадь трапеции $S=\dfrac{1}{2}(5+15)\dfrac{48}{5}=96$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2+(2a-2)x+a^2-2a-3=0,\\ \sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-a)^2}=4\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a\in[-1;3)\cup(3;7]$.

Решение. Левая часть второго уравнения есть расстояние между точками $A(0;a)$ и $B(-4;a)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно 4, второе уравнение системы задаёт отрезок AB, то есть множество точек вида $(t;a)$, где $-4 \le t \le 0$.

Решая первое уравнение как квадратное уравнение относительно x, находим, что $x_1 = -a - 1$, $x_2 = -a + 3$. Таким образом, первое уравнение задаёт две вертикальных прямых на плоскости. Для того чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы ровно одна из этих двух вертикальных прямых пересекала отрезок AB.

Первая прямая пересекает AB при $-4 \le x_1 \le 0$, т.е. при $-1 \le a \le 3$; вторая прямая – при $-4 \le x_2 \le 0$, т.е. при $3 \le a \le 7$. Следовательно, система имеет ровно одно решение при $a \in [-1;3) \cup (3;7]$.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[891870;\, 891899]$ могли получиться в результате сложения?

Ответ: 891880, 891891.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} = (10x + F) + (100000F + x) = 11x + 100001F = 11(x + 9091F)$. Таким образом, полученная сумма делится на 11. Из промежутка $[891870;\, 891899]$ на 11 делятся числа 891880, 891891.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате сложения. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$11(x + 9091F) = 891880\,,$$
$$11(x + 9091F) = 891891$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F = 1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x = 71989$, $F = 1$; второму – пара $x = 71990$, $F = 1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 719891, 719901, то в результате перестановки и сложения мы получим числа 891880, 891891.

8. На клетчатой доске размера 22×25 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 7 и 4 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2592.

Решение. Пусть сторона длины 25 – горизонтальная, сторона длины 22 – вертикальная. Дополним каждую нужную тройку клеток четвёртой клеткой так, чтобы центры этих четырёх клеток образовывали прямоугольник 4×7. Достаточно посчитать количество k таких четвёрок и результат умножить на 4.

Пусть катет длины 7 направлен по вертикали. Тогда положение прямоугольника однозначно определяется его левой нижней вершиной, которая может быть расположена в любой из $22 - 7 = 15$ нижних строк доски и в любом из $25 - 4 = 21$ левых столбцов доски. Итого $15 \cdot 21 = 315$ вариантов.

Если катет длины 7 направлен по горизонтали, то аналогично находим количество способов: $(25 - 7)(22 - 4) = 324$.

Итак, $k = 324 + 315 = 639$; в ответе получаем $4k = 2556$.

Решения, выезд, вариант **<u>И</u>**

1. Решите неравенство $\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{x^2}{2}+8x+33\right)\le -\log_{1/4}\left(x^2+13x+42\right)+\log_4\left(\frac{x-1}{x+7}\right)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-7)\cup[3+\sqrt{87};+\infty)$

Решение. Находим ОДЗ: $x\in(-\infty;-7)\cup(1;+\infty)$.

Перепишем неравенство в виде $\log_4\left(\frac{x^2}{2}+8x+33\right)\le\log_4\left((x+6)(x+7)\right)+\log_4\left(\frac{x-1}{x+7}\right)$. На ОДЗ оно равносильно каждому из следующих неравенств:

$\log_4\left(\frac{x^2}{2}+8x+33\right)\le\log_4\left((x+6)(x-1)\right)$; $\frac{x^2}{2}+8x+33\le x^2+5x-6$; $\frac{x^2}{2}-3x-39\ge 0$.

Последнее неравенство имеет решения $x\in(-\infty;3-\sqrt{87}]\cup[3+\sqrt{87};+\infty)$. Пересекая это множество с ОДЗ, получаем ответ.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}\frac{5x}{y}+\frac{2y}{x}+1=8xy,\\ \frac{7x}{y}-\frac{y}{x}+6=12xy.\end{cases}$

Ответ: $(1;1),(-1;-1),\left(\frac{\sqrt{165}}{2};\frac{\sqrt{165}}{16}\right),\left(-\frac{\sqrt{165}}{2};-\frac{\sqrt{165}}{16}\right)$.

Решение. Из первого уравнения системы, умноженного на три, вычтем второе уравнение, умноженное на два: $\frac{x}{y}+\frac{8y}{x}-9=0$. Обозначим $\frac{x}{y}=t$ и получим уравнение $t+\frac{8}{t}-9=0$, решая которое, находим, что $t=1$ или $t=8$.

Если $t=1$, то $x=y$ и получаем две пары чисел $(1;1),(-1;-1)$.

Если $t=8$, то $x=8y$ и получаем две пары чисел $\left(\frac{\sqrt{165}}{2};\frac{\sqrt{165}}{16}\right),\left(-\frac{\sqrt{165}}{2};-\frac{\sqrt{165}}{16}\right)$.

3. Рассматриваются всевозможные правильные треугольные пирамиды, у которых медианы боковых граней, проведённые из вершины пирамиды, равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

Ответ: $V=\frac{2a^3}{3}$, $\gamma=120^\circ$.

Решение. Пусть PO – высота правильной треугольной пирамиды $PABC$; K – середина ребра AC. Тогда $PK=a$. Пусть $\angle OKP=\beta$. Тогда $PO=a\sin\beta$, $KO=a\cos\beta$, площадь основания $S_{ABC}=3\sqrt{3}a^2\cos^2\beta$, объём пирамиды $V_{PABC}=\frac{1}{3}\cdot3\sqrt{3}a^2\cos^2\beta\cdot a\sin\beta=a^3\sqrt{3}\left(\sin\beta-\sin^3\beta\right)$.

Обозначим $\sin\beta=t$ и рассмотрим $f(t)=t-t^3$, где $t\in[0;1]$. $f'(t)=1-3t^2=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)$. Поскольку $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$, $f'(t)>0$ при $t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $f'(t)<0$ при $t>\frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем, что функция $f(t)$ достигает своего наибольшего значения при $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляя найденное значение $\sin\beta$ в формулу для объёма пирамиды, получаем $V_{\max}=\frac{2a^3}{3}$.

Для нахождения угла между соседними боковыми гранями пирамиды опустим перпендикуляры AH и CH из точек A и C на ребро PB. Тогда $\angle AHC = \gamma$ – искомый угол. Из треугольника PBK находим, что его высота $KH = \dfrac{OP \cdot KB}{BP} = \dfrac{a\sin\beta \cdot 3a\cos\beta}{\sqrt{a^2\sin^2\beta + 4a^2\cos^2\beta}} = \dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{AK}{HK} = \dfrac{a\sqrt{3}\cos\beta}{KH} = \sqrt{3}$, $\gamma = 120^\circ$.

4. Найдите наименьший корень уравнения $\operatorname{tg}12x + \operatorname{tg}7x = \dfrac{1}{\cos 7x}$, принадлежащий отрезку $\left[\dfrac{46\pi}{31}; \dfrac{92\pi}{31}\right]$.

Ответ: $x = \dfrac{97\pi}{62}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\sin 12x}{\cos 12x} + \frac{\sin 7x}{\cos 7x} = \frac{1}{\cos 7x}, \qquad \frac{\sin 12x\cos 7x + \cos 12x \sin 7x}{\cos 12x \cos 7x} = \frac{1}{\cos 7x}, \qquad \frac{\sin 19x}{\cos 12x\cos 7x} = \frac{1}{\cos 7x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 12x = \sin 19x, \\ \cos 12x \cos 7x \neq 0. \end{cases}$

Решаем первое уравнение системы:

$$\cos 12x = \cos\left(19x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x = 19x - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 12x = -19x + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$$

Решения первого уравнения совокупности не удовлетворяют условию $\cos 7x \neq 0$, следовательно, они не подходят. Второе уравнение даёт $x = \dfrac{\pi(4k+1)}{62}$. На данный в условии отрезок попадают числа $\dfrac{93\pi}{62}, \dfrac{97\pi}{62}, \dfrac{101\pi}{62}, \ldots$ Первое из них не удовлетворяет условию $\cos 7x \neq 0$ и, следовательно, не является решением уравнения. Число $\dfrac{97\pi}{62}$ удовлетворяет условию $\cos 12x \cos 7x \neq 0$ и является минимальным корнем на данном отрезке.

5. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона CD равна 10. Биссектриса угла ADC пересекает сторону AB в точке E, а прямую BC – в точке F, причём $DE \perp AB$, $BE = 4$. Найдите длины отрезков DE и AD, а также площадь трапеции.

Ответ: $DE = 9$, $AD = 15$, $S = 96$.

Решение. Так как $\angle CFD = \angle ADF = \angle CDF$, то ΔCFD равнобедренный, $CF = CD = 10$; $BF = CD - BC = 5$, $EF = \sqrt{BF^2 - BE^2} = 3$. Пусть CT – высота треугольника CFD. Тогда из подобия прямоугольных треугольников CTF и BEF следует, что $FT = 2 \cdot FE = 6$.

Далее находим: $DT = TF = 6$, $TE = EF = 3$, $DE = 9$.

Из подобия треугольников AED и BEF $(k = DE : EF = 3)$ следует, что $AD = 15$.

Высота трапеции равна сумме высот треугольников BEF и EAD, проведённых из вершины E. Высота EL треугольника CMK равна $EL = \dfrac{BE \cdot EF}{BF} = \dfrac{3 \cdot 4}{5} = \dfrac{12}{5}$. Высота трапеции $h = 4 \cdot EL = \dfrac{48}{5}$. Площадь трапеции $S = \dfrac{1}{2}(5 + 15)\dfrac{48}{5} = 96$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - (4a+2)x + 4a^2 + 4a - 3 = 0, \\ \sqrt{x^2 + (y+2a)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y+2a)^2} = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Решение. Левая часть второго уравнения есть расстояние между точками $A(0; -2a)$ и $B(-4; -2a)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно 4, второе уравнение системы задаёт отрезок AB, то есть множество точек вида $(t; -2a)$, где $-4 \le t \le 0$.

Решая первое уравнение как квадратное уравнение относительно x, находим, что $x_1 = 2a - 1$, $x_2 = 2a + 3$. Таким образом, первое уравнение задаёт две вертикальных прямых на плоскости. Для того чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы ровно одна из этих двух вертикальных прямых пересекала отрезок AB.

Первая прямая пересекает AB при $-4 \le x_1 \le 0$, т.е. при $-\frac{3}{2} \le a \le \frac{1}{2}$; вторая прямая – при $-4 \le x_2 \le 0$, т.е. при $-\frac{7}{2} \le a \le -\frac{3}{2}$. Следовательно, система имеет ровно одно решение при $a \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[375355; 375380]$ могли получиться в результате сложения?

Ответ: 375364, 375375.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} = (10x + F) + (100000F + x) = 11x + 100001F = 11(x + 9091F)$. Таким образом, полученная сумма делится на 11. Из промежутка $[375355; 375380]$ на 11 делятся числа 375364, 375375.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате сложения. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$11(x + 9091F) = 375364,$$
$$11(x + 9091F) = 374375$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F = 1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x = 25033$, $F = 1$; второму – пара $x = 25034$, $F = 1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 250331, 250341, то в результате перестановки и сложения мы получим числа 375364, 375375.

8. На клетчатой доске размера 31×19 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 5 и 7 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2592.

Решение. Пусть сторона длины 31 – горизонтальная, сторона длины 19 – вертикальная. Дополним каждую нужную тройку клеток четвёртой клеткой так, чтобы центры этих четырёх клеток образовывали прямоугольник 5×7. Достаточно посчитать количество k таких четвёрок и результат умножить на 4.

Пусть катет длины 5 направлен по вертикали. Тогда положение прямоугольника однозначно определяется его левой нижней вершиной, которая может быть расположена в любой из $19 - 5 = 14$ нижних строк доски и в любом из $31 - 7 = 24$ левых столбцов доски. Итого $14 \cdot 24 = 336$ вариантов.

Если катет длины 5 направлен по горизонтали, то аналогично находим количество способов: $(19 - 7)(31 - 5) = 312$.

Итак, $k = 336 + 312 = 648$; в ответе получаем $4k = 2592$.

Решения, выезд, вариант **Ф**

1. Решите неравенство $\log_{1/7}\left(\frac{x-1}{x-9}\right) \le \log_{1/7}\left(\frac{x^2}{2}-10x+51\right)+2\log_{49}\left(x^2-17x+72\right)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1-\sqrt{87}] \cup (9; +\infty)$

Решение. Находим ОДЗ: $x \in (-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$.

Перепишем неравенство в виде $\log_{1/7}\left(\frac{x-1}{x-9}\right)+\log_{1/7}\left((x-8)(x-9)\right) \le \log_{1/7}\left(\frac{x^2}{2}-10x+51\right)$. На ОДЗ оно равносильно каждому из следующих неравенств:

$\log_{1/7}\left(\frac{x^2}{2}-10x+51\right) \ge \log_{1/7}\left((x-8)(x-1)\right)$; $\frac{x^2}{2}-10x+51 \le x^2-9x+8$; $\frac{x^2}{2}+x-43 \ge 0$.

Последнее неравенство имеет решения $x \in (-\infty; -1-\sqrt{87}] \cup [-1+\sqrt{87}; +\infty)$. Пересекая это множество с ОДЗ, получаем ответ.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{3x}{y}+\frac{4y}{x}+4=\frac{8}{xy}, \\ \frac{3x}{y}+\frac{2y}{x}+6=\frac{2}{xy}. \end{cases}$

Ответ: $(2;-1), (-2;1), \left(\frac{2}{\sqrt{33}}; -3\sqrt{\frac{3}{11}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{33}}; 3\sqrt{\frac{3}{11}}\right)$

Решение. Из первого уравнения системы вычтем второе уравнение, умноженное на четыре: $\frac{-9x}{y}+\frac{-4y}{x}-20=0$. Обозначим $\frac{x}{y}=t$ и получим уравнение $-9t-\frac{4}{t}-20=0$, решая которое, находим, что $t=-2$ или $t=-\frac{2}{9}$.

Если $t=-2$, то $x=-2y$ и получаем две пары чисел $(-2;1), (2;-1)$.

Если $t=-\frac{2}{9}$, то $x=\frac{-2y}{9}$ и получаем две пары чисел $\left(\frac{2}{\sqrt{33}}; -3\sqrt{\frac{3}{11}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{33}}; 3\sqrt{\frac{3}{11}}\right)$.

3. Рассматриваются всевозможные правильные шестиугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

Ответ: $V=\frac{a^3}{3}$, $\gamma=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$.

Решение. Пусть PO – высота правильной шестиугольной пирамиды $PABCDEF$; отрезки AE и OF пересекаются в точке K. По условию $PF=a$. Пусть $\angle OFP=\beta$. Тогда $PO=a\sin\beta$, $FO=a\cos\beta$, площадь основания $S_{ABCDEF}=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\cos^2\beta$, объём пирамиды $V_{PABCDEF}=$ $=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\cos^2\beta\cdot a\sin\beta=\frac{\sqrt{3}a^3}{2}\left(\sin\beta-\sin^3\beta\right)$.

Обозначим $\sin\beta=t$ и рассмотрим $f(t)=t-t^3$, где $t\in[0;1]$. $f'(t)=1-3t^2=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)$.

Поскольку $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$, $f'(t)>0$ при $t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $f'(t)<0$ при $t>\frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем, что функция $f(t)$

достигает своего наибольшего значения при $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляя найденное значение $\sin\beta$ в формулу для объёма пирамиды, получаем $V_{\max}=\frac{a^3}{3}$.

Для нахождения угла между соседними боковыми гранями пирамиды опустим перпендикуляры AH и EH из точек A и E на ребро PF. Тогда $\angle AHE=\gamma$ – искомый угол. Из прямоугольного треугольника POF находим, что его высота $OL=\frac{OP\cdot OF}{PF}=\frac{a\sin\beta\cdot a\cos\beta}{a}=\frac{\sqrt{2}a}{3}$. $KH=\frac{1}{2}OL=\frac{\sqrt{2}a}{6}$

Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{AK}{KH}=3$, $\cos\gamma=-\frac{4}{5}$.

4. Найдите наибольший корень уравнения $\operatorname{tg}7x-\operatorname{tg}10x=\frac{1}{\cos 7x}$, принадлежащий отрезку $\left[\frac{2\pi}{13};\frac{46\pi}{13}\right]$.

Ответ: $x=\frac{87\pi}{26}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\sin 7x}{\cos 7x}-\frac{\sin 10x}{\cos 10x}=\frac{1}{\cos 7x},\qquad \frac{\sin 7x\cos 10x-\cos 7x\sin 10x}{\cos 10x\cos 7x}=\frac{1}{\cos 7x},\qquad \frac{-\sin 3x}{\cos 10x\cos 7x}=\frac{1}{\cos 7x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos 10x=-\sin 3x,\\ \cos 10x\cos 7x\neq 0.\end{cases}$

Решаем первое уравнение системы:

$$\cos 10x=\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10x=3x+\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 10x=-3x-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Решения первого уравнения совокупности не удовлетворяют условию $\cos 7x\neq 0$, следовательно, они не подходят. Второе уравнение даёт $x=\frac{\pi(4k-1)}{26}$. На данный в условии отрезок попадают числа $\frac{91\pi}{26},\frac{87\pi}{26},\frac{83\pi}{26},\ldots$ Первое из них не удовлетворяет условию $\cos 7x\neq 0$ и, следовательно, не является решением уравнения. Число $\frac{87\pi}{26}$ удовлетворяет условию $\cos 10x\cos 7x\neq 0$ и является максимальным корнем на данном отрезке.

5. Основание BC трапеции $ABCD$ равно 5, боковая сторона AB равна 10. Биссектриса угла BAD пересекает боковую сторону CD в точке M, а прямую BC – в точке K, причём $AK\perp CD$, $CM=3$. Найдите длины отрезков AM и AD, а также площадь трапеции.

Ответ: $AM=12$, $AD=15$, $S=96$.

Решение. Так как $\angle BKA=\angle KAD=\angle BAK$, то ΔABK равнобедренный, $BK=AB=10$; $CK=AB-BC=5$, $MK=\sqrt{CK^2-CM^2}=4$. Пусть BE – высота треугольника ABK. Тогда из подобия прямоугольных треугольников BEK и CMK следует, что $BE=2\cdot CM=6$.

Далее находим: $AE=EK$, $EM=MK=4$, $AM=3\cdot EM=12$.

Из подобия треугольников AMD и CMK ($k=AM:MK=3$) следует, что $AD=15$.

Высота трапеции равна сумме высот треугольников MCK и MAD, проведённых из вершины M. Высота MT треугольника CMK равна $MT=\frac{CM\cdot KM}{CK}=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}$. Высота трапеции $h=4\cdot MT=\frac{48}{5}$.

Площадь трапеции $S=\frac{1}{2}(5+15)\frac{48}{5}=96$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+(2a+2)x+a^2+2a-3=0, \\ \sqrt{x^2+(y+a)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y+a)^2}=4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a\in[-7;-3)\cup(-3;1]$.

Решение. Левая часть второго уравнения есть расстояние между точками $A(0;-a)$ и $B(4;-a)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно 4, второе уравнение системы задаёт отрезок AB, то есть множество точек вида $(t;-a)$, где $0\le t\le 4$.

Решая первое уравнение как квадратное уравнение относительно x, находим, что $x_1=1-a$, $x_2=-a-3$. Таким образом, первое уравнение задаёт две вертикальных прямых на плоскости. Для того чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы ровно одна из этих двух вертикальных прямых пересекала отрезок AB.

Первая прямая пересекает AB при $0\le x_1\le 4$, т.е. при $-3\le a\le 1$; вторая прямая – при $0\le x_2\le 4$, т.е. при $-7\le a\le -3$. Следовательно, система имеет ровно одно решение при $a\in[-7;-3)\cup(-3;1]$.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[427411;\,427434]$ могли получиться в результате сложения?

Ответ: 427416, 427427.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}+\overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}=(10x+F)+(100000F+x)=11x+100001F=11(x+9091F)$. Таким образом, полученная сумма делится на 11. Из промежутка $[427411;\,427434]$ на 11 делятся числа 427416, 427427.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате сложения. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$11(x+9091F)=427416\,,$$
$$11(x+9091F)=427427$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F=1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x=29765$, $F=1$; второму – пара $x=29766$, $F=1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 297651, 297661, то в результате перестановки и сложения мы получим числа 427416, 427427.

8. На клетчатой доске размера 28×24 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 9 и 5 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2824.

Решение. Пусть сторона длины 28 – горизонтальная, сторона длины 24 – вертикальная. Дополним каждую нужную тройку клеток четвёртой клеткой так, чтобы центры этих четырёх клеток образовывали прямоугольник 5×9. Достаточно посчитать количество k таких четвёрок и результат умножить на 4.

Пусть катет длины 5 направлен по вертикали. Тогда положение прямоугольника однозначно определяется его левой нижней вершиной, которая может быть расположена в любой из $24-5=19$ нижних строк доски и в любом из $28-9=19$ левых столбцов доски. Итого $19\cdot 19=361$ вариант.

Если катет длины 5 направлен по горизонтали, то аналогично находим количество способов: $(28-5)(24-9)=345$.

Итак, $k=361+345=706$; в ответе получаем $4k=2824$.

Решения, выезд, вариант **Р**

1. Решите неравенство $\log_{1/5}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)+2\log_{25}\left(\dfrac{x^2}{2}-6x+19\right)\le\log_5\left(x^2-9x+20\right)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-5-\sqrt{87}]\cup(5;+\infty)$

Решение. Находим ОДЗ: $x\in(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$.

Перепишем неравенство в виде $\log_{1/5}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)+\log_{1/5}\left((x-4)(x-5)\right)\le\log_{1/5}\left(\dfrac{x^2}{2}-6x+19\right)$. На ОДЗ оно равносильно каждому из следующих неравенств:

$\log_{1/5}\left(\dfrac{x^2}{2}-6x+19\right)\ge\log_{1/5}\left((x-4)(x+3)\right)$; $\dfrac{x^2}{2}-6x+19\le x^2-x-12$; $\dfrac{x^2}{2}+5x-31\ge 0$.

Последнее неравенство имеет решения $x\in(-\infty;-5-\sqrt{87}]\cup[-5+\sqrt{87};+\infty)$. Пересекая это множество с ОДЗ, получаем ответ.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{6x}{y}+\dfrac{2y}{x}-5=4xy,\\ \dfrac{7x}{y}+\dfrac{4y}{x}-10=3xy.\end{cases}$

Ответ: $(2;1),(-2;-1),\left(1/2;1\right),\left(-1/2;-1\right)$.

Решение. Из первого уравнения системы, умноженного на три, вычтем второе уравнение, умноженное на четыре: $\dfrac{-10x}{y}+\dfrac{-10y}{x}+25=0$. Обозначим $\dfrac{x}{y}=t$ и получим уравнение $-10t-\dfrac{10}{t}+25=0$, решая которое, находим, что $t=2$ или $t=\dfrac{1}{2}$.

Если $t=2$, то $x=2y$ и получаем две пары чисел $(2;1),(-2;-1)$.

Если $t=\dfrac{1}{2}$, то $x=\dfrac{y}{2}$ и получаем две пары чисел $\left(1/2;1\right),\left(-1/2;-1\right)$.

3. Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, боковые рёбра которых равны a.

а) Найдите наибольший возможный объём рассматриваемых пирамид.

б) Для пирамиды наибольшего объёма найдите угол между соседними боковыми гранями.

Ответ: $V=\dfrac{4a^3}{9\sqrt{3}}$, $\gamma=120^\circ$.

Решение. Пусть PO – высота правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$; боковое ребро $PA=a$. Пусть $\angle OAP=\beta$. Тогда $PO=a\sin\beta$, $AO=a\cos\beta$, площадь основания $S_{ABCD}=2a^2\cos^2\beta$, объём пирамиды $V_{PABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot 2a^2\cos^2\beta\cdot a\sin\beta=\dfrac{2a^3}{3}\left(\sin\beta-\sin^3\beta\right)$.

Обозначим $\sin\beta=t$ и рассмотрим $f(t)=t-t^3$, где $t\in[0;1]$. $f'(t)=1-3t^2=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)$. Поскольку $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$, $f'(t)>0$ при $t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $f'(t)<0$ при $t>\frac{1}{\sqrt{3}}$, получаем, что функция $f(t)$ достигает своего наибольшего значения при $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставляя найденное значение $\sin\beta$ в формулу для объёма пирамиды, получаем $V_{\max}=\dfrac{4a^3}{9\sqrt{3}}$.

Для нахождения угла между соседними боковыми гранями пирамиды опустим перпендикуляры AH и CH из точек A и C на ребро PD. Тогда $\angle AHC = \gamma$ – искомый угол. Из прямоугольного треугольника POD находим, что его высота $OH = OD \cdot \sin\beta = a\sin\beta\cos\beta = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{AO}{OH} = \sqrt{3}$, $\frac{\gamma}{2} = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$.

4. Найдите наибольший корень уравнения $\operatorname{ctg}12x + \operatorname{tg}5x = \frac{1}{\cos 5x}$, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{47\pi}{19}; -\frac{9\pi}{19}\right]$.

Ответ: $x = -\frac{23\pi}{38}$.

Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{\cos 12x}{\sin 12x} + \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \frac{1}{\cos 5x}, \qquad \frac{\cos 12x\cos 5x + \sin 12x\sin 5x}{\sin 12x\cos 5x} = \frac{1}{\cos 5x}, \qquad \frac{\cos 7x}{\sin 12x\cos 5x} = \frac{1}{\cos 5x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos 7x = \sin 12x, \\ \sin 12x\cos 5x \neq 0.\end{cases}$

Решаем первое уравнение системы:

$$\cos 7x = \cos\left(12x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = 12x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 7x = -12x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Решения первого уравнения совокупности не удовлетворяют условию $\cos 5x \neq 0$, следовательно, они не подходят. Второе уравнение даёт $x = \frac{\pi(1+4k)}{38}$. На данный в условии отрезок попадают числа $-\frac{19\pi}{38}, -\frac{23\pi}{38}, -\frac{27\pi}{38}, \ldots$ Первое из них не удовлетворяет условию $\cos 5x \neq 0$ и, следовательно, не является решением уравнения. Число $-\frac{23\pi}{38}$ удовлетворяет условию $\sin 12x\cos 5x \neq 0$ и является максимальным корнем на данном отрезке.

5. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 5, боковая сторона CD равна 10. Биссектриса угла ADC пересекает сторону AB в точке M, а прямую BC – в точке N, причём $DN \perp AM$, $MN = 3$. Найдите длины отрезков DN и AD, а также площадь трапеции.

Ответ: $DN = 12$, $AD = 15$, $S = 96$.

Решение. Так как $\angle DNC = \angle NDA = \angle NDC$, то ΔDNC равнобедренный, $CN = CD = 10$; $BN = CD - BC = 5$, $BM = \sqrt{BN^2 - NM^2} = 4$. Пусть CE – высота треугольника NCD. Тогда из подобия прямоугольных треугольников CEN и BMN следует, что $CE = 2 \cdot BM = 8$.

Далее находим: $DE = EN$, $EM = MN = 3$, $DN = 4 \cdot NM = 12$.

Из подобия треугольников AMD и BMN ($k = DM : MN = 3$) следует, что $AD = 15$.

Высота трапеции равна сумме высот треугольников BMN и MAD, проведённых из вершины M. Высота MT треугольника BMN равна $MT = \frac{BM \cdot NM}{BN} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$. Высота трапеции $h = 4 \cdot MT = \frac{48}{5}$.

Площадь трапеции $S = \frac{1}{2}(5+15)\frac{48}{5} = 96$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + (4a+2)y + 4a^2 + 4a - 3 = 0, \\ \sqrt{(x+2a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2a)^2 + (y-4)^2} = 4 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Решение. Левая часть второго уравнения есть расстояние между точками $A(-2a; 0)$ и $B(-2a; 4)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно 4, второе уравнение системы задаёт отрезок AB, то есть множество точек вида $(-2a; t)$, где $0 \le t \le 4$.

Решая первое уравнение как квадратное уравнение относительно y, находим, что $y_1 = 1 - 2a$, $y_2 = -2a - 3$. Таким образом, первое уравнение задаёт две горизонтальных прямых на плоскости. Для того чтобы система имела ровно одно решение, необходимо и достаточно, чтобы ровно одна из этих двух горизонтальных прямых пересекала отрезок AB.

Первая прямая пересекает AB при $0 \le y_1 \le 4$, т.е. при $-\frac{3}{2} \le a \le \frac{1}{2}$; вторая прямая – при $0 \le y_2 \le 4$, т.е. при $-\frac{7}{2} \le a \le -\frac{3}{2}$. Следовательно, система имеет ровно одно решение при $a \in \left[-\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

7. Последнюю цифру шестизначного числа переставили в начало (например, 456789 $\to$ 945678), и полученное шестизначное число прибавили к исходному числу. Какие числа из промежутка $[639619; 639647]$ могли получиться в результате сложения?

Ответ: 639628, 639639.

Решение. Пусть $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F}$ – данное шестизначное число. Обозначим пятизначное число $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ через x. Тогда $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}\overline{F} + \overline{F}\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} = (10x + F) + (100000F + x) = 11x + 100001F = 11(x + 9091F)$. Таким образом, полученная сумма делится на 11. Из промежутка $[639619; 639647]$ на 11 делятся числа 639628, 639639.

Докажем, что эти числа могут быть получены в результате сложения. Для этого надо доказать, что каждое из уравнений

$$11(x + 9091F) = 639628,$$

$$11(x + 9091F) = 639639$$

имеет целочисленное решение, где x – пятизначное число, а F – однозначное число, не равное нулю. Для этого достаточно в каждом из уравнений подставить $F = 1$ и убедиться, что получающееся значение x является пятизначным целым числом. Действительно, первому уравнению удовлетворяет пара $x = 49057$, $F = 1$; второму – пара $x = 49058$, $F = 1$. Значит, если в качестве исходных чисел взять 490571, 490581, то в результате перестановки и сложения мы получим числа 639628, 639639.

8. На клетчатой доске размера 34×27 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 3 и 11 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 4192.

Решение. Пусть сторона длины 34 – горизонтальная, сторона длины 27 – вертикальная. Дополним каждую нужную тройку клеток четвёртой клеткой так, чтобы центры этих четырёх клеток образовывали прямоугольник 3×11. Достаточно посчитать количество k таких четвёрок и результат умножить на 4.

Пусть катет длины 3 направлен по вертикали. Тогда положение прямоугольника однозначно определяется его левой нижней вершиной, которая может быть расположена в любой из $27 - 3 = 24$ нижних строк доски и в любом из $34 - 11 = 23$ левых столбцов доски. Итого $23 \cdot 24 = 552$ варианта.

Если катет длины 3 направлен по горизонтали, то аналогично находим количество способов: $(34 - 3)(27 - 11) = 496$.

Итак, $k = 496 + 552 = 1048$; в ответе получаем $4k = 4192$.

Критерии оценивания (Долгопрудный, [illegible])

За арифметическую ошибку, ***не имеющую принципиального значения****, снимается не более одного очка.*

1. (5) Левая часть уравнения (уменьшенная на единицу) представлена в виде произведения двух элементарных тригонометрических функций – **2 очка**;
решено полученное уравнение вида $\cos kx = 0$ – **1 очко**;
показано, что другое уравнение вида $\cos kx \cdot \sin 3kx = \pm 1$ не имеет решений – **2 очка**.

2. (5) *При «обычном» решении (приведённом в файле решений):*
показано, что знаменатель отрицателен при всех x (кроме $x = x_0$); избавился от знаменателя и получил равносильное (при $x \neq x_0$) неравенство – **3 очка**;
решено полученное неравенство – **2 очка**.
При решении обобщённым методом интервалов:
найдены нули числителя – **1 очко**;
найдены нули знаменателя – **1 очко**;
верно определены знаки на промежутках – **3 очка**,
если при этом нет обоснования выбора знаков – **снять 1 очко**.
При любом методе решения:
неравносильное преобразование неравенства (умножил на отрицательный знаменатель и не сменил знак; возвёл обе части в квадрат) – **0 очков за всю задачу**;
в ответе не учтено, что $x \neq x_0$ – **снимается 1 очко**.

3. (5) В неравенствах выделены полные квадраты и указан геометрический смысл каждого неравенства (круг) – **2 очка**;
записано условие касания кругов с потерей модуля и решено полученное уравнение – **1 очко**;
верно записано условие касания кругов и решено полученное уравнение – **3 очка**.
если вместо кругов рассматриваются окружности – **не более 2 очков за всю задачу.**

4. (6) Найдено произведение радиусов окружностей – **2 очка**;
найдено линейное соотношение между радиусами – **2 очка**;
найдены радиусы окружностей – **2 очка**.

5. (5) Доказано, что получающееся число делится на 9 – **2 очка**;
найдены полученные числа – **1 очко**;
доказано, что числа из данного отрезка, кратные 9, действительно могут быть получены (построены примеры) – **2 очка**.

6. (9) а) Найдено отношение объёмов – **2 очка**;
б) найдена длина искомого отрезка – **3 очка**;
в) найдена высота призмы – **3 очка**;
найден объём / площадь поверхности призмы – **1 очко**.

7. (6) Первое уравнение системы разложено на множители (например, решено как квадратное уравнение относительно одной из переменных) – **2 очка**;
рассмотрен случай $ax + by + c = 0$ (и доказано, что в этом случае решений нет) – **1 очко**;
верно рассмотрен случай $x = ky$ (или $y = kx$) – **3 очка**.
рассмотрен случай $x = ky$ ($y = kx$) с потерей модуля при извлечении $\sqrt{a^2}$ – **1 очко**;

8. (5) *При «обычном» решении (приведённом в файле решений):*
верно рассмотрен только один из двух случаев – **2 очка**.

<u>Критерии оценивания (Выезд)</u>

*За арифметическую ошибку, **<u>не имеющую принципиального значения</u>**, снимается не более одного очка.*

1. (5) Найдено ОДЗ – **<u>1 очко</u>**;
неравенство сведено к квадратному – **<u>2 очка</u>**;
решено полученное квадратное неравенство – **<u>1 очко</u>**;
полученные решения пересечены с ОДЗ – **<u>1 очко</u>**;
неравносильное преобразование неравенства – **<u>0 очков за всю задачу</u>**.

2. (5) Получено квадратное уравнение относительно $t = x/y$ (или $t = y/x$) – **<u>2 очка</u>**;
решено полученное квадратное уравнение – **<u>1 очко</u>**;
найдены решения системы – **<u>по 1 очку за каждый из двух случаев</u>**;
если при разборе случая потеряно хотя бы одно решение – **<u>0 очков за случай</u>**.

3. (6) Объём пирамиды представлен функцией одной переменной – **<u>1 очко</u>**;
найдены критические точки полученной функции – **<u>1 очко</u>**;
точка исследована на экстремум и найдено наибольшее значение объёма – **<u>1 очко</u>**;
найден угол между соседними боковыми гранями – **<u>3 очка</u>**.

4. (6) Уравнение сведено к виду $\cos kx = \sin lx$ – **<u>2 очка</u>**;
найдены все решения этого уравнения – **<u>2 очка</u>**;
если у полученного уравнения потеряна хотя бы одна серия решений –
<u>не более 2 очков за всю задачу;</u>
если решения полученного уравнения найдены неверно (арифметическая ошибка) –
<u>отбор корней не проверяется, не более 3 очков за задачу.</u>
отобран минимальный (максимальный) корень на отрезке (с учётом ОДЗ) – **<u>2 очка</u>**.

5. (5) Установлено, что треугольник, образованный боковой стороной, меньшим основанием и биссектрисой трапеции, является равнобедренным – **<u>2 очка</u>**;
за каждый из найденных отрезков – **<u>по 1 очку</u>**;
найдена площадь трапеции – **<u>1 очко</u>**.

6. (7) Первое уравнение разложено на множители (например, решено как квадратное уравнение относительно переменной) – **<u>2 очка</u>**;
установлено, что множество решений второго уравнения есть отрезок – **<u>3 очка</u>**;
верно найдены искомые значения параметра – **<u>2 очка</u>**;
найдены значения параметра и не учтено, что $a \neq a_0$ – **<u>1 очко</u>**.

7. (6) Доказано, что получающееся число делится на 11 – **<u>3 очка</u>**;
найдены полученные числа – **<u>1 очко</u>**;
доказано, что числа из данного отрезка, кратные 11, действительно могут быть получены (построены примеры) – **<u>2 очка</u>**.

8. (5) Верно посчитано количество прямоугольников (треугольников) фиксированной ориентации – **<u>2 очка</u>**;
если в решении рассмотрены не все виды ориентаций – **<u>не более 2 очков за задачу</u>**;
если при подсчёте количества прямоугольников (треугольников) – фиксированной ориентации вместо формулы вида $(m-a)(n-b)$ используется формула $(m-a\pm 1)(n-b\pm 1)$, то **<u>снимается 1 очко с набранной суммы.</u>**