МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax + 2$, $f_2(x) = x^2 + 3x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (3-2a)x + 4 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (6-a)x + 2 + 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -6\sqrt{2} \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

3. На столе лежат 130 различных карточек с числами 502, 504, 506, ..., 758, 760 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 42$, $DH = HC = 4$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right) \cdot \log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)+1\right)\log_{1-16x^4}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{4x}{3}+\frac{5}{6}\right) \geqslant 1.$$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{3}{4}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{3}{4}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 18$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - x - a$, $f_2(x) = x^2 + bx + 2$, $f_3(x) = 4x^2 + (b-3)x - 3a + 2$ и $f_4(x) = 4x^2 + (3b-1)x + 6 - a$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5} \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -\dfrac{5}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

3. На столе лежат 140 различных карточек с числами 4, 8, 12, …, 556, 560 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $DE = \frac{10}{3}$, $DH = HC = \frac{1}{9}$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}}\left(1+x^2\right) \cdot \log_{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}}\left(1-x^2\right) + 1\right) \log_{1-x^4}\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right) \geqslant 1.$$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{5}{12}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{5}{12}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 9$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, MN и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KL, KN и LM. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 7 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 + ax + 3$, $f_2(x) = x^2 + 2x - b$, $f_3(x) = x^2 + 2(a-1)x + b + 6$ и $f_4(x) = x^2 + (4-a)x - 2b - 3$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos y} = 2\sqrt{2} \operatorname{ctg} \dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

3. На столе лежат 200 различных карточек с числами 201, 203, 205, …, 597, 599 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 5$, $DH = HC = 2$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}}\left(1+\frac{x^2}{4}\right) \cdot \log_{\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)+1\right) \log_{1-\frac{1}{16}x^4}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}\right) \geqslant 1.$$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{4}{3}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{4}{3}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 4$, $KN = LM = 9$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 8 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2+2x+a$, $f_2(x) = x^2+bx-1$, $f_3(x) = 2x^2+(6-b)x+3a+1$ и $f_4(x) = 2x^2+(3b-2)x-a-3$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos y} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin y} = 3\sqrt{2} \operatorname{ctg} \dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

3. На столе лежат 160 различных карточек с числами 5, 10, 15, ..., 795, 800 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $DE = \frac{48}{7}$, $DH = HC = \frac{1}{7}$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{2}{27}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{19}{27}}\left(1+\frac{x^2}{9}\right) \cdot \log_{\frac{2}{27}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{19}{27}}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)+1\right)\log_{1-\frac{1}{81}x^4}\left(\frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}+\frac{19}{27}\right) \geqslant 1.$$

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{12}{5}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{12}{5}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 14$, $KN = LM = 25$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, MN и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KL, KN и LM. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

Билет 5

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - ax + 2$, $f_2(x) = x^2 + 3x + b$, $f_3(x) = 3x^2 + (3-2a)x + 4 + b$ и $f_4(x) = 3x^2 + (6-a)x + 2 + 2b$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение. Пусть $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2 - x_1| = \left|\frac{-b+\sqrt{T}-\left(-b-\sqrt{T}\right)}{2a}\right| = \frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{a^2-8},\ B = \sqrt{9-4b},\ C = \frac{1}{3}\sqrt{(3-2a)^2 - 12(4+b)},\ D = \frac{1}{3}\sqrt{(6-a)^2 - 12(2+b)}$$

Отсюда следует, что $C^2 - D^2 = \frac{1}{9}\left((4a^2 - 12a - 12b - 39) - (a^2 - 12a - 24b + 12)\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + 4b - 17\right)$, $A^2 - B^2 = a^2 + 4b - 17$. Значит, искомое отношение равно $\frac{1}{3}$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -6\sqrt{2} \operatorname{tg} \dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

Ответ: -1, $\frac{12}{35}$ или $-\frac{12}{35}$.

Решение. Перемножая два данных равенства, получаем $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos y \sin y} = -2$, что на ОДЗ равносильно следующему:

$$\cos 2x = -2 \sin y \cos y \Leftrightarrow \cos 2x + \cos\left(2y - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(x + y - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - y + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда следует, что либо $x + y - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $x - y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

В первом случае получаем, что $x + y = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда мгновенно следует, что $\operatorname{tg}(x+y) = -1$.

Во втором случае $x = y + \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Вводя дополнительный угол, можем преобразовать числитель дроби в левой части второго уравнения: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Подставляем сюда выражение для x и получаем

$$\sqrt{2}\cos\left(y + \frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos(y + \pi k) = \sqrt{2}(\cos y \cos \pi k - \sin y \sin \pi k) = (-1)^k \sqrt{2} \cos y.$$

Второе уравнение при этом принимает вид $(-1)^k\sqrt{2} = -6\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ может принимать значения $\pm\frac{1}{6}$. Значит, $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}} = \frac{2\cdot\left(\pm\frac{1}{6}\right)}{1-\frac{1}{36}} = \pm\frac{12}{35}$.

Так как в условии задано, что выражение $\operatorname{tg}(x+y)$ может принимать по крайней мере 3 различных значения, все три полученных случая возможны.

Замечание. Несложно убедиться в том, что все 3 случая реализуются.

В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos y} = -6\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}, \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y + \pi k\right)}{\cos y} = -6\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^k \operatorname{tg} y = -6\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, у первого уравнения есть решения (тангенс принимает любые значения), а, значит, есть решения и у системы.

Во втором случае подставим x не только в левую часть второго уравнения, но и в правую: $(-1)^k\sqrt{2} = -6\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(y+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{tg}\left(y+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{(-1)^k}{6}$. Несложно видеть, что это уравнение имеет решения при любых целых k, поэтому оба значения $\mathrm{tg}(x+y)$ могут приниматься.

3. На столе лежат 130 различных карточек с числами 502, 504, 506, ..., 758, 760 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

Ответ: 119 282.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Следовательно, остатки от деления на 3 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 3, т.е. имеет вид $3k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следующее за ним число есть $3k+2$ – и оно даёт остаток 2 от деления на 3, далее идёт $3k+4$, дающее остаток 1 от деления на 3, а затем – $3k+6$, которое снова делится на 3. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 3 идут в порядке $\ldots 0; 2; 1; 0; 2; 1; 0 \ldots$.

Среди данных нам чисел есть 44, дающие остаток 1 от деления на 3 (они образуют множество $A = \{502; 508; 514; \ldots; 760\}$), 43 числа, делящихся на 3 ($B = \{504; 510; 516; \ldots; 756\}$), 43 числа, дающих остаток 2 от деления на 3 ($C = \{506; 512; 518; \ldots; 758\}$).

Сумма трёх чисел может делиться на 3 в следующих случаях.

1) Все три числа дают одинаковые остатки от деления на 3. Есть C_{44}^3 способов выбрать 3 числа из множества A и по C_{43}^3 способов выбрать 3 числа из множеств B и C. В сумме получаем $\frac{44\cdot43\cdot42}{6} + 2\cdot\frac{43\cdot42\cdot41}{6} = 13\,244 + 2\cdot 12\,341 = 37\,926$ способов.

2) Если не все остатки одинаковы, то подходит только случай, когда все три остатка разные, т.е. мы должны выбрать по одному числу из каждого из множеств A, B, C. Получаем $44\cdot43\cdot43 = 81\,356$ способов.

В сумме выходит 119 282 способов.

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 42$, $DH = HC = 4$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

Ответ: $HP = 7\sqrt{46}$, $r = 5\sqrt{\frac{138}{7}}$, $R = 5\sqrt{\frac{322}{3}}$.

Решение. Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HC\cdot HB = 4\cdot 46 \Rightarrow HF = 2\sqrt{46};$$
$$HF^2 = HD\cdot HE \Rightarrow HE = \frac{HF^2}{HD} = 46;$$
$$BA^2 = BD\cdot BE = 50\cdot 92 \Rightarrow BA = 10\sqrt{46}.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $PF = PA = PB$, следовательно, $PF = \frac{1}{2}AB = 5\sqrt{46}$. Итак, $PH = PF + FH = 7\sqrt{46}$. Пусть $\angle BPH = \gamma$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BPH получаем $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP\cdot PH\cdot\cos\gamma$, т.е. $46^2 = 7^2\cdot 46 + 5^2\cdot 46 - 70\cdot 46\cos\gamma$, откуда $46 = 49 + 25 - 70\cos\gamma$, $\cos\gamma = \frac{2}{5}$.

Пусть O и Q – центры, а R и r – радиусы окружностей Ω и ω соответственно; так как окружности касаются, точка касания F лежит на линии центров OQ, и при этом $OQ \perp PH$. Углы A и F четырёхугольника $AOFP$ прямые, поэтому $\angle AOF = 180^\circ - \angle APF = \angle BPF = \gamma$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABQO$. В ней $OQ = R + r$, $OA = R$, $BQ = r$, $AB = 10\sqrt{46}$, $\angle AOQ = \gamma$. Опуская из точки Q высоту QH на основание AO, получаем прямоугольный треугольник OHQ, в котором $QH = AB = 10\sqrt{46}$, $OH = R-r$. По теореме Пифагора получаем $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(10\sqrt{46}\right)^2$; кроме того, $\frac{2}{5} = \cos\gamma = \frac{R-r}{R+r}$. Из последнего уравнения получаем $R = \frac{7}{3}r$, а из первого следует, что $Rr = 25 \cdot 46$. Решая эту систему уравнений, находим, что $R = \frac{5\sqrt{322}}{\sqrt{3}}$, $r = \frac{5\sqrt{138}}{\sqrt{7}}$.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1+4x^2\right)\cdot\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}\left(1-4x^2\right)+1\right)\log_{1-16x^4}\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{4x}{3}+\frac{5}{6}\right)\geqslant 1.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}; -\frac{1}{9}\right) \cup \left(-\frac{1}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

Решение. ОДЗ логарифмов неравенства определяется условиями

$$\begin{gathered}
1-4x^2>0 \Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{1}{2},\\
1-4x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0,\\
1+4x^2>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\\
1+4x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0,\\
\tfrac{3x^2}{2}-\tfrac{4x}{3}+\tfrac{5}{6}>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\\
\tfrac{3x^2}{2}-\tfrac{4x}{3}+\tfrac{5}{6}\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\frac{1}{9},\\ x\neq 1.\end{cases}
\end{gathered}$$

В итоге получаем $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{9}$.

Обозначим $\frac{3x^2}{2} - \frac{4x}{3} + \frac{5}{6} = u$, $1 + 4x^2 = v$, $1 - 4x^2 = w$. Записываем и преобразуем неравенство:

$$\left(\log_u v\cdot\log_u w+1\right)\log_{vw}u\geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1}{\log_u vw}-1\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1-\log_u v-\log_u w}{\log_u vw}\geqslant 1\Leftrightarrow\frac{\left(\log_u v-1\right)\left(\log_u w-1\right)}{\log_u vw}\geqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем $\frac{(u-1)(v-u)(u-1)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(v-u)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0$. Подставляем сюда выражения для u, v, w и решаем получающееся неравенство:

$$\frac{\left(\frac{5x^2}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{11x^2}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{4x}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(-16x^4\right)}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{\left(15x^2+8x+1\right)\left(33x^2-8x-1\right)}{x^2\left(9x^2-8x-1\right)}\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(5x+1)(3x+1)(3x-1)(11x+1)}{x^2(x-1)(9x+1)}\geqslant 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\tfrac{1}{3}\right]\cup\left[-\tfrac{1}{5};-\tfrac{1}{9}\right)\cup\left[-\tfrac{1}{11};0\right)\cup\left(0;\tfrac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty).$$

С учётом ОДЗ остаётся $x \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{5}; -\frac{1}{9}\right) \cup \left(-\frac{1}{11}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{3}{4}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{3}{4}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

Ответ: $b = \frac{25}{12}$.

Решение. Рассмотрим сначала $b > 0$. Обозначим начало координат через $O(0;0)$, центр окружности через $Q(a;b)$ (так как он лежит на прямой $y = b$, его ордината равна b); точки пересечения прямой с параболой через $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ $(x_1 < 0,\ x_2 > 0)$. Пусть также $T(0;b)$ – точка пересечения данной прямой с осью ординат, C – точка пересечения окружности с осью ординат, отличная от O.

Треугольник QOC равнобедренный ($QO = QC$ как радиусы), QT – его высота, следовательно, QT также и медиана, $CT = OT$, поэтому точка C имеет координаты $(0;2b)$. Опустим из точки A перпендикуляр AH на ось ординат. Тогда $\angle TAH$ есть угол наклона прямой, его тангенс равен $\frac{3}{4}$. Отсюда $\cos\angle TAH = \frac{4}{5}$, $AT = AH : \cos\angle TAH = \frac{5}{4}AH = -\frac{5x_1}{4}$. Аналогично находим, что $BT = \frac{5x_2}{4}$.

AB и OC – две хорды данной окружности. По теореме о пересекающихся хордах[1] $CT \cdot OT = AT \cdot BT$, т.е. $b \cdot b = -\frac{5x_1}{4} \cdot \frac{5x_2}{4}$. Абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения прямой $y = \frac{3}{4}x + b$ и параболы $y = \frac{3}{4}x^2$ определяются уравнением $\frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}x + b \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{4b}{3} = 0$. По теореме Виета $x_1x_2 = -\frac{4b}{3}$. Значит, $b^2 = -\frac{25}{16} \cdot \left(-\frac{4b}{3}\right) \Leftrightarrow b^2 = \frac{25b}{12}$, откуда $b = \frac{25}{12}$.

Значение $b = 0$ не подходит, так как при этом заданная прямая принимает вид $y = \frac{3}{4}x$, т.е. проходит через начало координат.

При $b < 0$ (естественно, мы рассматриваем только те b, при которых прямая и парабола имеют две точки пересечения) оба числа x_1 и x_2 положительны. Точка T является серединой отрезка OC (сохраняем все обозначения первого случая). Тогда с одной стороны выходит, что точка T – середина хорды OC, т.е. лежит внутри окружности. С другой стороны, точки A и B лежат на окружности, поэтому AB является хордой этой окружности, а точка T лежит на продолжении хорды AB, т.е. вне окружности. Получаем противоречие, и этот случай невозможен.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 18$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

а) Найдите $\angle SAB$.

б) Найдите длину отрезка CQ.

Ответ: а) $\angle SAB = \arccos\frac{1}{6}$; б) $CQ = \frac{52}{3}$.

Решение. Противоположные стороны четырёхугольника $KLMN$ попарно равны, так что он параллелограмм. Поскольку плоскость $(KLMN)$ пересекает плоскости (ABC) и (ABS) по параллельным прямым KL и MN, эти прямые параллельны прямой пересечения этих плоскостей – то есть AB. Аналогично, $NK \parallel LM \parallel SC$. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны друг другу, поэтому $SC \perp AB$, а $KLMN$ – прямоугольник. Следовательно, радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 равны 1.

[1] Заметим, что для отрезков AB и OC, пересекающихся в точке T, условие $CT \cdot OT = AT \cdot BT$ является необходимым и достаточным условием того, что четыре точки A, B, C, O лежат на одной окружности.

Отсюда также следует, что прямоугольник $KLMN$ симметричен относительно плоскости α, содержащей ребро SC и середину AB. Тогда и конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ также симметричны относительно этой плоскости. Поэтому P – середина AB.

Обозначим через X и Y середины сторон KL и MN соответственно, а через O_1 и O_2 – центры окружностей Ω_1 и Ω_2 соответственно; эти четыре точки лежат на оси симметрии прямоугольника $KLMN$, параллельной KN, а значит – в плоскости α. Более того, $XY \parallel SC$, то есть треугольники PCS и PXY подобны.

Пусть $AB = BC = CA = 2a$, $SA = SB = SC = \ell$, $\nu = a/\ell$. Тогда $CP = a\sqrt{3}$, $SP = \sqrt{\ell^2 - a^2}$. Поскольку $XY = KN = 18$, из подобия получаем $\frac{XP}{CP} = \frac{XY}{CS}$, т.е. $\frac{XP}{a\sqrt{3}} = \frac{18}{\ell}$, $XP = \frac{18\sqrt{3}a}{\ell} = 18\nu\sqrt{3}$. Аналогично, $\frac{YP}{SP} = \frac{XY}{CS}$, $\frac{YP}{SP} = \frac{18}{\ell}$, $YP = \frac{18\sqrt{\ell^2-a^2}}{\ell} = 18\sqrt{1-\nu^2}$. С другой стороны, так как конус $\mathcal{F}_1$ – прямой, имеем $PO_1 \perp XY$, причём $XO_1 = \frac{1}{2}KL = 1$, $YO_1 = XY - XO_1 = 17$. Отсюда $17^2 - 1^2 = O_1Y^2 - O_1X^2 = (O_1Y^2 + O_1P^2) - (O_1X^2 + O_1P^2) = PY^2 - PX^2 = 18^2(1 - \nu^2 - 3\nu^2)$, или $16 \cdot 18 = 18^2(1 - 4\nu^2)$, откуда $\nu = \frac{1}{6}$. Значит, $\angle SAB = \arccos \frac{AP}{AS} = \arccos \nu = \arccos \frac{1}{6}$.

Итак, $\ell = 6a$, и из подобия имеем

$$\frac{2}{2a} = \frac{KL}{AB} = \frac{CX}{CP} = 1 - \frac{XP}{CP} = 1 - \frac{XY}{CS} = 1 - \frac{18}{\ell} = 1 - \frac{3}{a},$$

откуда $a = 4$ и $\ell = 24$. Пусть PO_1 пересекает SC в точке H. Тогда PH – высота треугольника SCP, причём (поскольку $XY \parallel CS$) $\frac{CH}{CS} = \frac{XO_1}{XY} = \frac{1}{18}$. Значит, $CH = \frac{SC}{18} = \frac{4}{3}$. Поскольку $O_2Q \perp XY$, HO_1O_2Q – прямоугольник, так что $HQ = O_1O_2 = 16$. Отсюда $CQ = CH + HQ = \frac{52}{3}$.

Билет 6

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x) = x^2 - x - a$, $f_2(x) = x^2 + bx + 2$, $f_3(x) = 4x^2 + (b-3)x - 3a + 2$ и $f_4(x) = 4x^2 + (3b-1)x + 6 - a$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A| \neq |B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Пусть $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2 - x_1| = \left|\frac{-b+\sqrt{T}-\left(-b-\sqrt{T}\right)}{2a}\right| = \frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{1+4a},\ B = \sqrt{b^2-8},\ C = \frac{1}{4}\sqrt{(b-3)^2 + 16(3a-2)},\ D = \frac{1}{4}\sqrt{(3b-1)^2 + 16(a-6)}$$

Отсюда следует, что $C^2 - D^2 = \frac{1}{16}\left((b^2 - 6b + 48a - 23) - (9b^2 - 6b + 16a - 95)\right) = \frac{1}{2}\left(9 + 4a - b^2\right)$, $A^2 - B^2 = 9 + 4a - b^2$. Значит, искомое отношение равно $\frac{1}{2}$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin y} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos y} = -\dfrac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

Ответ: -1, $\frac{20}{21}$ или $-\frac{20}{21}$.

Решение. Перемножая два данных равенства, получаем $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos y \sin y} = -2$, что на ОДЗ равносильно следующему:

$$\cos 2x = -2\sin y\cos y \Leftrightarrow \cos 2x + \cos\left(2y - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(x + y - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - y + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда следует, что либо $x + y - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо $x - y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

В первом случае получаем, что $x + y = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда мгновенно следует, что $\operatorname{tg}(x+y) = -1$.

Во втором случае $x = y + \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Вводя дополнительный угол, можем преобразовать числитель дроби в левой части первого уравнения: $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Подставляем сюда выражение для x и получаем

$$\sqrt{2}\cos\left(y + \frac{\pi}{2} + \pi k\right) = -\sqrt{2}\sin(y + \pi k) = -\sqrt{2}(\sin y\cos \pi k + \cos y \sin \pi k) = (-1)^{k+1}\sqrt{2}\sin y.$$

Первое уравнение при этом принимает вид $(-1)^{k+1}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ может принимать значения $\pm\frac{5}{2}$. Значит, $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}} = \frac{2\cdot\left(\pm\frac{5}{2}\right)}{1-\frac{25}{4}} = \mp\frac{20}{21}$.

Так как в условии задано, что выражение $\operatorname{tg}(x+y)$ может принимать по крайней мере 3 различных значения, все три полученных случая возможны.

Замечание. Несложно убедиться в том, что все 3 случая реализуются.

В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin y} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}, \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos(\pi - y + \pi k)}{\sin y} = \frac{2}{5}\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^{k+1}\operatorname{ctg} y = \frac{2}{5}\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right), \\ x = \frac{3\pi}{4} - y + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, у первого уравнения есть решения (котангенс принимает любые значения), а, значит, есть решения и у системы.

Во втором случае подставим x не только в левую часть первого уравнения, но и в правую: $(-1)^{k+1}\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{5(-1)^{k+1}}{2}$. Несложно видеть, что это уравнение имеет решения при любых целых k, поэтому оба значения $\operatorname{tg}(x+y)$ могут приниматься.

3. На столе лежат 140 различных карточек с числами 4, 8, 12, ..., 556, 560 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

Ответ: 149 224.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 4. Следовательно, остатки от деления на 3 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 3, т.е. имеет вид $3k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следующее за ним число есть $3k+4 = 3(k+1)+1$ – и оно даёт остаток 1 от деления на 3, далее идёт $3k+8 = 3(k+2)+2$, дающее остаток 2 от деления на 3, а затем – $3k+12$, которое снова делится на 3. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 3 идут в порядке $\ldots 0; 1; 2; 0; 1; 2; 0 \ldots$.

Среди данных нам чисел есть 47, дающие остаток 1 от деления на 3 (они образуют множество $A = \{4; 16; 28; \ldots; 556\}$), 46 чисел, делящихся на 3 ($B = \{12; 24; 36; \ldots; 552\}$), 47 чисел, дающих остаток 2 от деления на 3 ($C = \{8; 20; 32; \ldots; 560\}$).

Сумма трёх чисел может делиться на 3 в следующих случаях.

1) Все три числа дают одинаковые остатки от деления на 3. Есть C_{46}^3 способов выбрать 3 числа из множества B и по C_{47}^3 способов выбрать 3 числа из множеств A и C. В сумме получаем $\frac{46\cdot45\cdot44}{6} + 2\cdot\frac{47\cdot46\cdot45}{6} = 15\,180 + 2\cdot 16\,215 = 47\,610$ способов.

2) Если не все остатки одинаковы, то подходит только случай, когда все три остатка разные, т.е. мы должны выбрать по одному числу из каждого из множеств A, B, C. Получаем $47\cdot47\cdot46 = 101\,614$ способов.

В сумме выходит 149 224 способов.

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $DE = \frac{10}{3}$, $DH = HC = \frac{1}{9}$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

Ответ: $HP = \frac{5\sqrt{31}}{9}$, $r = \frac{4\sqrt{31}}{3\sqrt{15}}$, $R = \frac{4\sqrt{155}}{9\sqrt{3}}$.

Решение. Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HD\cdot HE = \frac{1}{9}\cdot\frac{31}{9} = \frac{31}{81} \Rightarrow HF = \frac{\sqrt{31}}{9};$$
$$HF^2 = HC\cdot HB \Rightarrow HB = \frac{HF^2}{HC} = \frac{31}{9};$$
$$BA^2 = BD\cdot BE = \frac{32}{9}\cdot\frac{62}{9} = \frac{64\cdot 31}{9^2} \Rightarrow BA = \frac{8}{9}\sqrt{31}.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $PF = PA = PB$, следовательно, $PF = \frac{1}{2}AB = \frac{4}{9}\sqrt{31}$. Итак, $PH = PF + FH = \frac{5}{9}\sqrt{31}$. Пусть $\angle BPH = \gamma$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BPH получаем $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP\cdot PH\cdot\cos\gamma$, т.е. $\left(\frac{31}{9}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot 31 + \left(\frac{5}{9}\right)^2\cdot 31 - 2\cdot\frac{20}{9^2}\cdot 31\cos\gamma$, откуда $31 = 16+25-40\cos\gamma$, $\cos\gamma = \frac{1}{4}$.

Пусть O и Q – центры, а R и r – радиусы окружностей Ω и ω соответственно; так как окружности касаются, точка касания F лежит на линии центров OQ, и при этом $OQ \perp PH$. Углы A и F четырёхугольника $AOFP$ прямые, поэтому $\angle AOF = 180^\circ - \angle APF = \angle BPF = \gamma$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABQO$. В ней $OQ = R + r$, $OA = R$, $BQ = r$, $AB = \frac{8}{9}\sqrt{31}$, $\angle AOQ = \gamma$. Опуская из точки Q высоту QH на основание AO, получаем прямоугольный треугольник OHQ, в котором $QH = AB = \frac{8}{9}\sqrt{31}$, $OH = R - r$. По теореме Пифагора получаем $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(\frac{8\sqrt{31}}{9}\right)^2$; кроме того, $\frac{1}{4} = \cos\gamma = \frac{R-r}{R+r}$. Из последнего уравнения получаем $R = \frac{5r}{3}$, а из первого следует, что $Rr = \frac{16\cdot 31}{81}$. Решая эту систему уравнений, находим, что $R = \frac{4\sqrt{155}}{9\sqrt{3}}$, $r = \frac{4\sqrt{31}}{3\sqrt{15}}$.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}}\left(1+x^2\right)\cdot\log_{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{6}}\left(1-x^2\right)+1\right)\log_{1-x^4}\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{x}{2}+\frac{5}{6}\right)\geqslant 1.$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{5}\right] \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

Решение. ОДЗ логарифмов неравенства определяется условиями

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1,$$
$$1 - x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0,$$
$$1 + x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},$$
$$1 + x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0,$$
$$\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{5}{6} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},$$
$$\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{5}{6} \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

В итоге получаем $x \in (-1; 1)$ и $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{4}$.

Обозначим $\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{5}{6} = u$, $1 + x^2 = v$, $1 - x^2 = w$. Записываем и преобразуем неравенство:

$$(\log_u v \cdot \log_u w + 1)\log_{vw} u \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\log_u v \cdot \log_u w + 1}{\log_u vw} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_u v \cdot \log_u w + 1 - \log_u v - \log_u w}{\log_u vw} \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{(\log_u v - 1)(\log_u w - 1)}{\log_u vw} \geqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем $\frac{(u-1)(v-u)(u-1)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(v-u)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0$. Подставляем сюда выражения для u, v, w и решаем получающееся неравенство:

$$\frac{\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}\right)\left(-\frac{5x^2}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{2} - \frac{1}{6}\right)(-x^4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(2x^2 - 3x + 1)(10x^2 + 3x - 1)}{x^2(4x^2 + 3x - 1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x-1)(5x-1)(2x+1)}{x^2(x+1)(4x-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{5}\right] \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty).$$

С учётом ОДЗ остаётся $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{5}\right] \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{5}{12}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{5}{12}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

   Ответ: $b = \frac{169}{60}$.

   Решение. Рассмотрим сначала $b > 0$. Обозначим начало координат через $O(0;0)$, центр окружности через $Q(a;b)$ (так как он лежит на прямой $y = b$, его ордината равна b); точки пересечения прямой с параболой через $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ $(x_1 < 0,\ x_2 > 0)$. Пусть также $T(0;b)$ – точка пересечения данной прямой с осью ординат, C – точка пересечения окружности с осью ординат, отличная от O.

   Треугольник QOC равнобедренный ($QO = QC$ как радиусы), QT – его высота, следовательно, QT также и медиана, $CT = OT$, поэтому точка C имеет координаты $(0;2b)$. Опустим из точки A перпендикуляр AH на ось ординат. Тогда $\angle TAH$ есть угол наклона прямой, его тангенс равен $\frac{5}{12}$. Отсюда $\cos\angle TAH = \frac{12}{13}$, $AT = AH : \cos\angle TAH = \frac{13}{12}AH = -\frac{13x_1}{12}$. Аналогично находим, что $BT = \frac{13x_2}{12}$.

   AB и OC – две хорды данной окружности. По теореме о пересекающихся хордах[2] $CT \cdot OT = AT \cdot BT$, т.е. $b \cdot b = -\frac{13x_1}{12} \cdot \frac{13x_2}{12}$. Абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения прямой $y = \frac{5}{12}x + b$ и параболы $y = \frac{5}{12}x^2$ определяются уравнением $\frac{5}{12}x^2 = \frac{5}{12}x + b \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{12b}{5} = 0$. По теореме Виета $x_1x_2 = -\frac{12b}{5}$.

   Значит, $b^2 = -\frac{169}{144} \cdot \left(-\frac{12b}{5}\right) \Leftrightarrow b^2 = \frac{169b}{60}$, откуда $b = \frac{169}{60}$.

   Значение $b = 0$ не подходит, так как при этом заданная прямая принимает вид $y = \frac{5}{12}x$, т.е. проходит через начало координат.

   При $b < 0$ (естественно, мы рассматриваем только те b, при которых прямая и парабола имеют две точки пересечения) оба числа x_1 и x_2 положительны. Точка T является серединой отрезка OC (сохраняем все обозначения первого случая). Тогда с одной стороны выходит, что точка T – середина хорды OC, т.е. лежит внутри окружности. С другой стороны, точки A и B лежат на окружности, поэтому AB является хордой этой окружности, а точка T лежит на продолжении хорды AB, т.е. вне окружности. Получаем противоречие, и этот случай невозможен.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 2$, $KN = LM = 9$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, MN и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KL, KN и LM. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

   Ответ: а) $\angle SAB = \arccos\frac{2}{3}$; б) $CQ = \frac{7}{3}$.

   Решение. Противоположные стороны четырёхугольника $KLMN$ попарно равны, так что он параллелограмм. Поскольку плоскость $(KLMN)$ пересекает плоскости (ABC) и (ABS) по параллельным прямым KL и MN, эти прямые параллельны прямой пересечения этих плоскостей – то есть AB. Аналогично, $NK \parallel LM \parallel SC$. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны друг другу, поэтому $SC \perp AB$, а $KLMN$ – прямоугольник. Следовательно, радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 равны 1.

---

[2] Заметим, что для отрезков AB и OC, пересекающихся в точке T, условие $CT \cdot OT = AT \cdot BT$ является необходимым и достаточным условием того, что четыре точки A, B, C, O лежат на одной окружности.

Отсюда также следует, что прямоугольник $KLMN$ симметричен относительно плоскости α, содержащей ребро SC и середину AB. Тогда и конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ также симметричны относительно этой плоскости. Поэтому P – середина AB.

Обозначим через X и Y середины сторон KL и MN соответственно, а через O_1 и O_2 – центры окружностей Ω_1 и Ω_2 соответственно; эти четыре точки лежат на оси симметрии прямоугольника $KLMN$, параллельной KN, а значит – в плоскости α. Более того, $XY \parallel SC$, то есть треугольники PCS и PXY подобны.

Пусть $AB = BC = CA = 2a$, $SA = SB = SC = \ell$, $\nu = a/\ell$. Тогда $CP = a\sqrt{3}$, $SP = \sqrt{\ell^2 - a^2}$. Поскольку $XY = KN = 9$, из подобия получаем $\frac{XP}{CP} = \frac{XY}{CS}$, т.е. $\frac{XP}{a\sqrt{3}} = \frac{9}{\ell}$, $XP = \frac{9\sqrt{3}a}{\ell} = 9\nu\sqrt{3}$. Аналогично, $\frac{YP}{SP} = \frac{XY}{CS}$, $\frac{YP}{SP} = \frac{9}{\ell}$, $YP = \frac{9\sqrt{\ell^2-a^2}}{\ell} = 9\sqrt{1-\nu^2}$. С другой стороны, так как конус $\mathcal{F}_1$ – прямой, имеем $PO_1 \perp XY$, причём $YO_1 = \frac{1}{2}MN = 1$, $XO_1 = XY - YO_1 = 8$. Отсюда $1^2 - 8^2 = O_1Y^2 - O_1X^2 = (O_1Y^2 + O_1P^2) - (O_1X^2 + O_1P^2) = PY^2 - PX^2 = 9^2(1 - \nu^2 - 3\nu^2)$, или $-7 \cdot 9 = 9^2(1 - 4\nu^2)$, откуда $\nu = \frac{2}{3}$. Значит, $\angle SAB = \arccos \frac{AP}{AS} = \arccos \nu = \arccos \frac{2}{3}$.

Итак, $\ell = \frac{3a}{2}$, и из подобия имеем

$$\frac{2}{2a} = \frac{KL}{AB} = \frac{CX}{CP} = 1 - \frac{XP}{CP} = 1 - \frac{XY}{CS} = 1 - \frac{9}{\ell} = 1 - \frac{6}{a},$$

откуда $a = 7$ и $\ell = \frac{21}{2}$. Пусть PO_1 пересекает SC в точке H. Тогда PH – высота треугольника SCP, причём (поскольку $XY \parallel CS$) $\frac{CH}{CS} = \frac{XO_1}{XY} = \frac{8}{9}$. Значит, $CH = \frac{8}{9}SC = \frac{28}{3}$. Поскольку $O_2Q \perp XY$, HO_1O_2Q – прямоугольник, так что $HQ = O_1O_2 = 7$. Отсюда $CQ = CH - HQ = \frac{7}{3}$.

Билет 7

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)=x^2+ax+3$, $f_2(x)=x^2+2x-b$, $f_3(x)=x^2+2(a-1)x+b+6$ и $f_4(x)=x^2+(4-a)x-2b-3$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A|\neq|B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

   Ответ: 3.

   Решение. Пусть $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2-x_1|=\left|\frac{-b+\sqrt{T}-\left(-b-\sqrt{T}\right)}{2a}\right|=\frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A=\sqrt{a^2-12},\ B=\sqrt{4+4b},\ C=\sqrt{(2a-2)^2-4(6+b)},\ D=\sqrt{(4-a)^2+4(2b+3)}$$

   Отсюда следует, что $C^2-D^2=\left((4a^2-8a-4b-20)-(a^2-8a+8b+28)\right)=3\left(a^2-4b-16\right)$, $A^2-B^2=a^2-4b-16$. Значит, искомое отношение равно 3.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos y}=2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin y}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

   Ответ: 1, $\frac{4}{3}$ или $-\frac{4}{3}$.

   Решение. Перемножая два данных равенства, получаем $\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos y\sin y}=2$, что на ОДЗ равносильно следующему:

$$\cos 2x=2\sin y\cos y\Leftrightarrow\cos 2x+\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2\cos\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-y-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

   откуда следует, что либо $x+y+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, либо $x-y-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

   В первом случае получаем, что $x+y=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, откуда мгновенно следует, что $\operatorname{tg}(x+y)=1$.

   Во втором случае $x=y+\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Вводя дополнительный угол, можем преобразовать числитель дроби в левой части второго уравнения: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Подставляем сюда выражение для x и получаем

$$\sqrt{2}\cos\left(y+\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=-\sqrt{2}\sin(y+\pi k)=-\sqrt{2}(\sin y\cos\pi k+\cos y\sin\pi k)=(-1)^{k+1}\sqrt{2}\sin y.$$

   Второе уравнение при этом принимает вид $(-1)^{k+1}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ может принимать значения ±2. Значит, $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}}=\frac{2\cdot(\pm2)}{1-4}=\mp\frac{4}{3}$.

   Так как в условии задано, что выражение $\operatorname{tg}(x+y)$ может принимать по крайней мере 3 различных значения, все три полученных случая возможны.

   Замечание. Несложно убедиться в том, что все 3 случая реализуются.

   В первом случае получаем систему

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2},\\ x=\frac{\pi}{4}-y+\pi k,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\cos(-y+\pi k)}{\sin y}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right),\\ x=\frac{\pi}{4}-y+\pi k,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-1)^k\operatorname{ctg}y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right),\\ x=\frac{\pi}{4}-y+\pi k,k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

   Очевидно, у первого уравнения есть решения (котангенс принимает любые значения), а, значит, есть решения и у системы.

   Во втором случае подставим x не только в левую часть второго уравнения, но и в правую: $(-1)^{k+1}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(y+\frac{3\pi 8}{+}\frac{\pi k}{2}\right)\Leftrightarrow\operatorname{tg}\left(y+\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)=2(-1)^{k+1}$. Несложно видеть, что это уравнение имеет решения при любых целых k, поэтому оба значения $\operatorname{tg}(x+y)$ могут приниматься.

3. На столе лежат 200 различных карточек с числами 201, 203, 205, ..., 597, 599 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

Ответ: 437 844.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Следовательно, остатки от деления на 3 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 3, т.е. имеет вид $3k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следующее за ним число есть $3k+2$ – и оно даёт остаток 2 от деления на 3, далее идёт $3k+4 = 3(k+1)+1$, дающее остаток 1 от деления на 3, а затем – $3k+6$, которое снова делится на 3. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 3 идут в порядке $\ldots 0; 2; 1; 0; 2; 1; 0 \ldots$.

Среди данных нам чисел есть 66, дающих остаток 1 от деления на 3 (они образуют множество $A = \{205; 211; 217; \ldots; 595\}$), 67 чисел, делящихся на 3 ($B = \{201; 207; 213; \ldots; 597\}$), 67 чисел, дающих остаток 2 от деления на 3 ($C = \{203; 209; 215; \ldots; 599\}$).

Сумма трёх чисел может делиться на 3 в следующих случаях.

1) Все три числа дают одинаковые остатки от деления на 3. Есть C_{66}^3 способов выбрать 3 числа из множества A и по C_{67}^3 способов выбрать 3 числа из множеств B и C. В сумме получаем $\frac{66\cdot 65\cdot 64}{6} + 2\cdot\frac{67\cdot 66\cdot 65}{6} = 45\,760 + 2\cdot 47\,905 = 141\,570$ способов.

2) Если не все остатки одинаковы, то подходит только случай, когда все три остатка разные, т.е. мы должны выбрать по одному числу из каждого из множеств A, B, C. Получаем $66\cdot 67\cdot 67 = 296\,274$ способов.

В сумме выходит 437 844 способов.

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 5$, $DH = HC = 2$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

Ответ: $HP = \frac{5\sqrt{14}}{2}$, $r = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$, $R = \frac{3\sqrt{35}}{\sqrt{2}}$.

Решение. Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HC\cdot HB = 2\cdot 7 = 14 \Rightarrow HF = \sqrt{14};$$

$$HF^2 = HD\cdot HE \Rightarrow HE = \frac{HF^2}{HD} = 7;$$

$$BA^2 = BD\cdot BE = 9\cdot 14 \Rightarrow BA = 3\sqrt{14}.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $PF = PA = PB$, следовательно, $PF = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}\sqrt{14}$. Итак, $PH = PF + FH = \frac{5}{2}\sqrt{14}$. Пусть $\angle BPH = \gamma$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BPH получаем $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP\cdot PH\cdot\cos\gamma$, т.е. $49 = \frac{63}{2} + \frac{175}{2} - 105\cos\gamma$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

Пусть O и Q – центры, а R и r – радиусы окружностей Ω и ω соответственно; так как окружности касаются, точка касания F лежит на линии центров OQ, и при этом $OQ \perp PH$. Углы A и F четырёхугольника $AOFP$ прямые, поэтому $\angle AOF = 180^\circ - \angle APF = \angle BPF = \gamma$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABQO$. В ней $OQ = R + r$, $OA = R$, $BQ = r$, $AB = 3\sqrt{14}$, $\angle AOQ = \gamma$. Опуская из точки Q высоту QH на основание AO, получаем прямоугольный треугольник OHQ, в котором $QH = AB = 3\sqrt{14}$, $OH = R - r$. По теореме Пифагора получаем $(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(3\sqrt{14}\right)^2$; кроме того, $\frac{2}{3} = \cos\gamma = \frac{R-r}{R+r}$. Из последнего уравнения получаем $R = 5r$, а из первого следует, что $Rr = \frac{63}{2}$. Решая эту систему уравнений, находим, что $R = 3\sqrt{\frac{35}{2}}$, $r = 3\sqrt{\frac{7}{10}}$.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\cdot\log_{\frac{1}{6}x^2+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)+1\right)\log_{1-\frac{1}{16}x^4}\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}\right)\geqslant 1.$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{4}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{8}{15}\right] \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

Решение. ОДЗ логарифмов неравенства определяется условиями

$$\begin{gathered}
1-\frac{x^2}{4}>0 \Leftrightarrow -2<x<2,\\
1-\frac{x^2}{4}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0,\\
1+\frac{x^2}{4}>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\\
1+\frac{x^2}{4}\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0,\\
\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\\
\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{19}{27}\neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\frac{8}{3},\\ x\neq \frac{2}{3}.\end{cases}
\end{gathered}$$

В итоге получаем $x \in (-2; 2)$ и $x \neq 0$, $x \neq \frac{2}{3}$.

Обозначим $\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} + \frac{19}{27} = u$, $1 + \frac{x^2}{4} = v$, $1 - \frac{x^2}{4} = w$. Записываем и преобразуем неравенство:

$$\left(\log_u v\cdot\log_u w+1\right)\log_{vw} u\geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1}{\log_u vw}-1\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log_u v\cdot\log_u w+1-\log_u v-\log_u w}{\log_u vw}\geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\left(\log_u v-1\right)\left(\log_u w-1\right)}{\log_u vw}\geqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем $\frac{(u-1)(v-u)(u-1)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(v-u)(w-u)}{(u-1)(vw-1)} \geqslant 0$. Подставляем сюда выражения для u, v, w и решаем получающееся неравенство:

$$\frac{\left(\frac{x^2}{12}\frac{x}{3}+\frac{8}{27}\right)\left(-\frac{5x^2}{12}-\frac{x}{3}+\frac{8}{27}\right)}{\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}-\frac{8}{27}\right)\left(-\frac{x^4}{16}\right)}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3x^2}{4}-3x+\frac{8}{3}\right)\left(\frac{15x^2}{4}+3x-\frac{8}{3}\right)}{x^2\left(\frac{3x^2}{2}+3x-\frac{8}{3}\right)}\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{3}{4}\left(x-\frac{8}{3}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)\frac{15}{4}\left(x-\frac{8}{15}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)}{\frac{3x^2}{2}\left(x+\frac{8}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)}\geqslant 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{8}{3}\right)\cup\left[-\frac{4}{3};0\right)\cup\left(0;\frac{8}{15}\right]\cup\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3};+\infty\right).$$

С учётом ОДЗ остаётся $x \in \left[-\frac{4}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{8}{15}\right] \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{4}{3}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{4}{3}x + b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

Ответ: $b = \frac{25}{12}$.

Решение. Рассмотрим сначала $b > 0$. Обозначим начало координат через $O(0;0)$, центр окружности через $Q(a;b)$ (так как он лежит на прямой $y = b$, его ордината равна b); точки пересечения прямой с параболой через $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ ($x_1 < 0$, $x_2 > 0$). Пусть также $T(0;b)$ – точка пересечения данной прямой с осью ординат, C – точка пересечения окружности с осью ординат, отличная от O.

Треугольник QOC равнобедренный ($QO = QC$ как радиусы), QT – его высота, следовательно, QT также и медиана, $CT = OT$, поэтому точка C имеет координаты $(0;2b)$. Опустим из точки A перпендикуляр AH на ось ординат. Тогда $\angle TAH$ есть угол наклона прямой, его тангенс равен $\frac{4}{3}$. Отсюда $\cos\angle TAH = \frac{3}{5}$, $AT = AH : \cos\angle TAH = \frac{5}{3}AH = -\frac{5x_1}{3}$. Аналогично находим, что $BT = \frac{5x_2}{3}$.

AB и OC – две хорды данной окружности. По теореме о пересекающихся хордах[3] $CT \cdot OT = AT \cdot BT$, т.е. $b \cdot b = -\frac{5x_1}{3} \cdot \frac{5x_2}{3}$. Абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения прямой $y = \frac{4}{3}x + b$ и параболы $y = \frac{4}{3}x^2$ определяются уравнением $\frac{4}{3}x^2 = \frac{4}{3}x + b \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{3b}{4} = 0$. По теореме Виета $x_1x_2 = -\frac{3b}{4}$. Значит, $b^2 = -\frac{25}{9} \cdot \left(-\frac{3b}{4}\right) \Leftrightarrow b^2 = \frac{25b}{12}$, откуда $b = \frac{25}{12}$.

Значение $b = 0$ не подходит, так как при этом заданная прямая принимает вид $y = \frac{4}{3}x$, т.е. проходит через начало координат.

При $b < 0$ (естественно, мы рассматриваем только те b, при которых прямая и парабола имеют две точки пересечения) оба числа x_1 и x_2 положительны. Точка T является серединой отрезка OC (сохраняем все обозначения первого случая). Тогда с одной стороны выходит, что точка T – середина хорды OC, т.е. лежит внутри окружности. С другой стороны, точки A и B лежат на окружности, поэтому AB является хордой этой окружности, а точка T лежит на продолжении хорды AB, т.е. вне окружности. Получаем противоречие, и этот случай невозможен.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 4$, $KN = LM = 9$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, KL и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KN, LM и MN. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

   Ответ: а) $\angle SAB = \arccos\frac{1}{3}$; б) $CQ = \frac{25}{3}$.

   Решение. Противоположные стороны четырёхугольника $KLMN$ попарно равны, так что он параллелограмм. Поскольку плоскость $(KLMN)$ пересекает плоскости (ABC) и (ABS) по параллельным прямым KL и MN, эти прямые параллельны прямой пересечения этих плоскостей – то есть AB. Аналогично, $NK \parallel LM \parallel SC$. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны друг другу, поэтому $SC \perp AB$, а $KLMN$ – прямоугольник. Следовательно, радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 равны 1.

   Отсюда также следует, что прямоугольник $KLMN$ симметричен относительно плоскости α, содержащей ребро SC и середину AB. Тогда и конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ также симметричны относительно этой плоскости. Поэтому P – середина AB.

   Обозначим через X и Y середины сторон KL и MN соответственно, а через O_1 и O_2 – центры окружностей Ω_1 и Ω_2 соответственно; эти четыре точки лежат на оси симметрии прямоугольника $KLMN$, параллельной KN, а значит – в плоскости α. Более того, $XY \parallel SC$, то есть треугольники PCS и PXY подобны.

[3] Заметим, что для отрезков AB и OC, пересекающихся в точке T, условие $CT \cdot OT = AT \cdot BT$ является необходимым и достаточным условием того, что четыре точки A, B, C, O лежат на одной окружности.

Пусть $AB = BC = CA = 2a$, $SA = SB = SC = \ell$, $\nu = a/\ell$. Тогда $CP = a\sqrt{3}$, $SP = \sqrt{\ell^2 - a^2}$. Поскольку $XY = KN = 9$, из подобия получаем $\frac{XP}{CP} = \frac{XY}{CS}$, т.е. $\frac{XP}{a\sqrt{3}} = \frac{9}{\ell}$, $XP = \frac{9\sqrt{3}a}{\ell} = 9\nu\sqrt{3}$. Аналогично, $\frac{YP}{SP} = \frac{XY}{CS}$, $\frac{YP}{SP} = \frac{9}{\ell}$, $YP = \frac{9\sqrt{\ell^2-a^2}}{\ell} = 9\sqrt{1-\nu^2}$. С другой стороны, так как конус $\mathcal{F}_1$ – прямой, имеем $PO_1 \perp XY$, причём $XO_1 = \frac{1}{2}KL = 2$, $YO_1 = XY - XO_1 = 7$. Отсюда $7^2 - 2^2 = O_1Y^2 - O_1X^2 = (O_1Y^2 + O_1P^2) - (O_1X^2 + O_1P^2) = PY^2 - PX^2 = 9^2(1 - \nu^2 - 3\nu^2)$, или $5 \cdot 9 = 9^2(1 - 4\nu^2)$, откуда $\nu = \frac{1}{3}$. Значит, $\angle SAB = \arccos\frac{AP}{AS} = \arccos\nu = \arccos\frac{1}{3}$.

Итак, $\ell = 3a$, и из подобия имеем

$$\frac{4}{2a} = \frac{KL}{AB} = \frac{CX}{CP} = 1 - \frac{XP}{CP} = 1 - \frac{XY}{CS} = 1 - \frac{9}{\ell} = 1 - \frac{3}{a},$$

откуда $a = 5$ и $\ell = 15$. Пусть PO_1 пересекает SC в точке H. Тогда PH – высота треугольника SCP, причём (поскольку $XY \parallel CS$) $\frac{CH}{CS} = \frac{XO_1}{XY} = \frac{2}{9}$. Значит, $CH = \frac{2SC}{9} = \frac{10}{3}$. Поскольку $O_2Q \perp XY$, HO_1O_2Q – прямоугольник, так что $HQ = O_1O_2 = 5$. Отсюда $CQ = CH + HQ = \frac{25}{3}$.

Билет 8

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)=x^2+2x+a$, $f_2(x)=x^2+bx-1$, $f_3(x)=2x^2+(6-b)x+3a+1$ и $f_4(x)=2x^2+(3b-2)x-a-3$. Пусть разности их корней равны соответственно A, B, C и D, и при этом $|A|\neq|B|$. Найдите отношение $\frac{C^2-D^2}{A^2-B^2}$. Значения A, B, C, D, a, b не заданы.

   Ответ: 2.

   Решение. Пусть $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом T. Тогда его корни определяются формулой $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{T}}{2a}$, поэтому $|x_2-x_1|=\left|\frac{-b+\sqrt{T}-(-b-\sqrt{T})}{2a}\right|=\frac{\sqrt{T}}{|a|}$. Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A=\sqrt{4-4a},\ B=\sqrt{b^2+4},\ C=\frac{1}{2}\sqrt{(6-b)^2-8(1+3a)},\ D=\frac{1}{2}\sqrt{(3b-2)^2+8(a+3)}$$

   Отсюда следует, что $C^2-D^2=\frac{1}{4}\big((b^2-12b-24a+28)-(9b^2-12b+8a+28)\big)=-2\left(b^2+4a\right)$, $A^2-B^2=-\left(b^2+4a\right)$. Значит, искомое отношение равно 2.

2. Известно, что $\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos y}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}$ и $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin y}=3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x+y}{2}$. Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg}(x+y)$, если известно, что их не менее трёх.

   Ответ: 1, $\frac{3}{4}$ или $-\frac{3}{4}$.

   Решение. Перемножая два данных равенства, получаем $\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos y\sin y}=2$, что на ОДЗ равносильно следующему:

$$\cos 2x=2\sin y\cos y\Leftrightarrow\cos 2x+\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2\cos\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-y-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

   откуда следует, что либо $x+y+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, либо $x-y-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

   В первом случае получаем, что $x+y=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, откуда мгновенно следует, что $\operatorname{tg}(x+y)=1$.

   Во втором случае $x=y+\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Вводя дополнительный угол, можем преобразовать числитель дроби в левой части первого уравнения: $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Подставляем сюда выражение для x и получаем

$$\sqrt{2}\cos\left(y+\pi+\pi k\right)=-\sqrt{2}\cos(y+\pi k)=-\sqrt{2}(\cos y\cos\pi k-\sin y\sin\pi k)=(-1)^{k+1}\sqrt{2}\cos y.$$

   Второе уравнение при этом принимает вид $(-1)^{k+1}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ может принимать значения ± 3. Значит, $\operatorname{tg}(x+y)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2}}=\frac{2\cdot(\pm 3)}{1-9}=\mp\frac{3}{4}$.

   Так как в условии задано, что выражение $\operatorname{tg}(x+y)$ может принимать по крайней мере 3 различных значения, все три полученных случая возможны.

   Замечание. Несложно убедиться в том, что все 3 случая реализуются.

   В первом случае получаем систему

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos y}=\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{tg}\frac{x+y}{2},\\ x=\frac{\pi}{4}-y+\pi k,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y+\pi k\right)}{\cos y}=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right),\\ x=\frac{\pi}{4}-y+\pi k,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-1)^k\operatorname{tg}y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right),\\ x=\frac{\pi}{4}-y+\pi k,k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

   Очевидно, у первого уравнения есть решения (тангенс принимает любые значения), а, значит, есть решения и у системы.

   Во втором случае подставим x не только в левую часть второго уравнения, но и в правую: $(-1)^{k+1}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{tg}\left(y+\frac{3\pi 8}{+}\frac{\pi k}{2}\right)\Leftrightarrow\operatorname{tg}\left(y+\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)=3(-1)^{k+1}$. Несложно видеть, что это уравнение имеет решения при любых целых k, поэтому оба значения $\operatorname{tg}(x+y)$ могут приниматься.

3. На столе лежат 160 различных карточек с числами 5, 10, 15, ..., 795, 800 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 3?

Ответ: 223 342.

Решение. Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5. Следовательно, остатки от деления на 3 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 3, т.е. имеет вид $3k$, где $k \in \mathbb{N}$, то следующее за ним число есть $3k+5 = 3(k+1)+2$ – и оно даёт остаток 2 от деления на 3, далее идёт $3k+10 = 3(k+3)+1$, дающее остаток 1 от деления на 3, а затем – $3k+15$, которое снова делится на 3. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 3 идут в порядке $\ldots 0; 2; 1; 0; 2; 1; 0 \ldots$.

Среди данных нам чисел есть 53, дающие остаток 1 от деления на 3 (они образуют множество $A = \{10; 25; 40; \ldots; 790\}$), 53 числа, делящихся на 3 ($B = \{15; 30; 45; \ldots; 795\}$), 54 числа, дающих остаток 2 от деления на 3 ($C = \{5; 20; 35; \ldots; 800\}$).

Сумма трёх чисел может делиться на 3 в следующих случаях.

1) Все три числа дают одинаковые остатки от деления на 3. Есть C_{54}^3 способов выбрать 3 числа из множества C и по C_{53}^3 способов выбрать 3 числа из множеств A и B. В сумме получаем $\frac{54\cdot53\cdot52}{6} + 2\cdot\frac{53\cdot52\cdot51}{6} = 24\,804 + 2\cdot 23\,426 = 71\,656$ способов.

2) Если не все остатки одинаковы, то подходит только случай, когда все три остатка разные, т.е. мы должны выбрать по одному числу из каждого из множеств A, B, C. Получаем $53\cdot54\cdot54 = 151\,686$ способов.

В сумме выходит 223 342 способов.

4. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $DE = \frac{48}{7}$, $DH = HC = \frac{1}{7}$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

Ответ: $HP = 6$, $r = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$, $R = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Решение. Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HD\cdot HE = \frac{1}{7}\cdot 7 = 1 \Rightarrow HF = 1;$$
$$HF^2 = HC\cdot HB \Rightarrow HB = \frac{HF^2}{HC} = 7;$$
$$BA^2 = BD\cdot BE = \frac{50}{7}\cdot 14 = 100 \Rightarrow BA = 10.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой, $PF = PA = PB$, следовательно, $PF = \frac{1}{2}AB = 5$. Итак, $PH = PF + FH = 6$. Пусть $\angle BPH = \gamma$. Тогда по теореме косинусов для треугольника BPH получаем $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP\cdot PH\cdot\cos\gamma$, т.е. $49 = 25 + 36 - 60\cos\gamma$, $\cos\gamma = \frac{1}{5}$.

Пусть O и Q – центры, а R и r – радиусы окружностей Ω и ω соответственно; так как окружности касаются, точка касания F лежит на линии центров OQ, и при этом $OQ \perp PH$. Углы A и F четырёхугольника $AOFP$ прямые, поэтому $\angle AOF = 180^\circ - \angle APF = \angle BPF = \gamma$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABQO$. В ней $OQ = R + r$, $OA = R$, $BQ = r$, $AB = 10$, $\angle AOQ = \gamma$. Опуская из точки Q высоту QH на основание AO, получаем прямоугольный треугольник OHQ, в котором $QH = AB = 10$, $OH = R - r$. По теореме Пифагора получаем $(R+r)^2 = (R-r)^2+10^2$; кроме того, $\frac{1}{5} = \cos\gamma = \frac{R-r}{R+r}$. Из последнего уравнения получаем $R = \frac{3r}{2}$, а из первого следует, что $Rr = 25$. Решая эту систему уравнений, находим, что $R = 5\sqrt{\frac{3}{2}}$, $r = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{2}{27}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{19}{27}}\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\cdot\log_{\frac{2}{27}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{19}{27}}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)+1\right)\log_{1-\frac{1}{81}x^4}\left(\frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}+\frac{19}{27}\right)\geqslant 1.$$

Ответ: $x\in[-2;-1)\cup\left[-\frac{4}{5};\,0\right)\cup(0;\,2]$.

Решение. ОДЗ логарифмов неравенства определяется условиями

$$\begin{gathered}1-\frac{x^2}{9}>0\Leftrightarrow -3<x<3,\\ 1-\frac{x^2}{9}\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0,\\ 1+\frac{x^2}{9}>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\\ 1+\frac{x^2}{9}\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0,\\ \frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}+\frac{19}{27}>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R},\\ \frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}+\frac{19}{27}\neq 1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1,\\ x\neq 4.\end{cases}\end{gathered}$$

В итоге получаем $x\in(-3;3)$ и $x\neq 0$, $x\neq -1$.

Обозначим $\frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}+\frac{19}{27}=u$, $1+\frac{x^2}{9}=v$, $1-\frac{x^2}{9}=w$. Записываем и преобразуем неравенство:

$$(\log_u v\cdot\log_u w+1)\log_{vw}u\geqslant 1\Leftrightarrow\frac{\log_u v\cdot\log_u w+1}{\log_u vw}-1\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{\log_u v\cdot\log_u w+1-\log_u v-\log_u w}{\log_u vw}\geqslant 1\Leftrightarrow\frac{(\log_u v-1)(\log_u w-1)}{\log_u vw}\geqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b-\log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c=1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем $\frac{(u-1)(v-u)(u-1)(w-u)}{(u-1)(vw-1)}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{(v-u)(w-u)}{(u-1)(vw-1)}\geqslant 0$. Подставляем сюда выражения для u, v, w и решаем получающееся неравенство:

$$\frac{\left(\frac{x^2}{27}+\frac{2x}{9}+\frac{8}{27}\right)\left(-\frac{5x^2}{27}+\frac{2x}{9}+\frac{8}{27}\right)}{\left(\frac{2x^2}{27}-\frac{2x}{9}-\frac{8}{27}\right)\left(-\frac{x^4}{81}\right)}\geqslant 0\Leftrightarrow\frac{(x^2+6x+8)(5x^2-6x-8)}{x^2(x^2-3x-4)}\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(x+2)(x+4)(x-2)(5x+4)}{x^2(x-4)(x+1)}\geqslant 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-4)\cup[-2;-1)\cup\left[-\frac{4}{5};0\right)\cup(0;2]\cup[4;+\infty).$$

С учётом ОДЗ остаётся $x\in[-2;-1)\cup\left[-\frac{4}{5};\,0\right)\cup(0;\,2]$.

6. Окружность, центр которой лежит на прямой $y=b$, пересекает параболу $y=\frac{12}{5}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек – начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y=\frac{12}{5}x+b$. Найдите все значения b, при которых описанная конфигурация возможна.

Ответ: $b = \frac{169}{60}$.

Решение. Рассмотрим сначала $b > 0$. Обозначим начало координат через $O(0;0)$, центр окружности через $Q(a;b)$ (так как он лежит на прямой $y = b$, его ордината равна b); точки пересечения прямой с параболой через $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ ($x_1 < 0$, $x_2 > 0$). Пусть также $T(0;b)$ – точка пересечения данной прямой с осью ординат, C – точка пересечения окружности с осью ординат, отличная от O.

Треугольник QOC равнобедренный ($QO = QC$ как радиусы), QT – его высота, следовательно, QT также и медиана, $CT = OT$, поэтому точка C имеет координаты $(0;2b)$. Опустим из точки A перпендикуляр AH на ось ординат. Тогда $\angle TAH$ есть угол наклона прямой, его тангенс равен $\frac{12}{5}$. Отсюда $\cos\angle TAH = \frac{5}{13}$, $AT = AH : \cos\angle TAH = \frac{13}{5}AH = -\frac{13x_1}{5}$. Аналогично находим, что $BT = \frac{13x_2}{5}$.

AB и OC – две хорды данной окружности. По теореме о пересекающихся хордах[4] $CT \cdot OT = AT \cdot BT$, т.е. $b \cdot b = -\frac{13x_1}{5} \cdot \frac{13x_2}{5}$. Абсциссы x_1 и x_2 точек пересечения прямой $y = \frac{12}{5}x + b$ и параболы $y = \frac{12}{5}x^2$ определяются уравнением $\frac{12}{5}x^2 = \frac{12}{5}x + b \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{5b}{12} = 0$. По теореме Виета $x_1x_2 = -\frac{5b}{12}$.

Значит, $b^2 = -\frac{169}{25} \cdot \left(-\frac{5b}{12}\right) \Leftrightarrow b^2 = \frac{169b}{60}$, откуда $b = \frac{169}{60}$.

Значение $b = 0$ не подходит, так как при этом заданная прямая принимает вид $y = \frac{12}{5}x$, т.е. проходит через начало координат.

При $b < 0$ (естественно, мы рассматриваем только те b, при которых прямая и парабола имеют две точки пересечения) оба числа x_1 и x_2 положительны. Точка T является серединой отрезка OC (сохраняем все обозначения первого случая). Тогда с одной стороны выходит, что точка T – середина хорды OC, т.е. лежит внутри окружности. С другой стороны, точки A и B лежат на окружности, поэтому AB является хордой этой окружности, а точка T лежит на продолжении хорды AB, т.е. вне окружности. Получаем противоречие, и этот случай невозможен.

7. На рёбрах AC, BC, BS, AS правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S выбраны точки K, L, M, N соответственно. Известно, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости, причём $KL = MN = 14$, $KN = LM = 25$. В четырёхугольнике $KLMN$ расположены две окружности Ω_1 и Ω_2, причём окружность Ω_1 касается сторон KN, MN и LM, а окружность Ω_2 касается сторон KL, KN и LM. Прямые круговые конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ с основаниями Ω_1 и Ω_2 соответственно расположены внутри данной пирамиды, причём вершина P конуса $\mathcal{F}_1$ лежит на ребре AB, а вершина Q конуса $\mathcal{F}_2$ лежит на ребре CS.

   а) Найдите $\angle SAB$.

   б) Найдите длину отрезка CQ.

   Ответ: а) $\angle SAB = \arccos\frac{3}{5}$; б) $CQ = \frac{77}{5}$.

   Решение. Противоположные стороны четырёхугольника $KLMN$ попарно равны, так что он параллелограмм. Поскольку плоскость $(KLMN)$ пересекает плоскости (ABC) и (ABS) по параллельным прямым KL и MN, эти прямые параллельны прямой пересечения этих плоскостей – то есть AB. Аналогично, $NK \parallel LM \parallel SC$. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся рёбра перпендикулярны друг другу, поэтому $SC \perp AB$, а $KLMN$ – прямоугольник. Следовательно, радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 равны 1.

   Отсюда также следует, что прямоугольник $KLMN$ симметричен относительно плоскости α, содержащей ребро SC и середину AB. Тогда и конусы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ также симметричны относительно этой плоскости. Поэтому P – середина AB.

[4] Заметим, что для отрезков AB и OC, пересекающихся в точке T, условие $CT \cdot OT = AT \cdot BT$ является необходимым и достаточным условием того, что четыре точки A, B, C, O лежат на одной окружности.

Обозначим через X и Y середины сторон KL и MN соответственно, а через O_1 и O_2 – центры окружностей Ω_1 и Ω_2 соответственно; эти четыре точки лежат на оси симметрии прямоугольника $KLMN$, параллельной KN, а значит – в плоскости α. Более того, $XY \parallel SC$, то есть треугольники PCS и PXY подобны.

Пусть $AB = BC = CA = 2a$, $SA = SB = SC = \ell$, $\nu = a/\ell$. Тогда $CP = a\sqrt{3}$, $SP = \sqrt{\ell^2 - a^2}$. Поскольку $XY = KN = 25$, из подобия получаем $\frac{XP}{CP} = \frac{XY}{CS}$, т.е. $\frac{XP}{a\sqrt{3}} = \frac{25}{\ell}$, $XP = \frac{25\sqrt{3}a}{\ell} = 25\nu\sqrt{3}$. Аналогично, $\frac{YP}{SP} = \frac{XY}{CS}$, $\frac{YP}{SP} = \frac{25}{\ell}$, $YP = \frac{25\sqrt{\ell^2-a^2}}{\ell} = 25\sqrt{1-\nu^2}$. С другой стороны, так как конус $\mathcal{F}_1$ – прямой, имеем $PO_1 \perp XY$, причём $YO_1 = \frac{1}{2}MN = 7$, $XO_1 = XY - YO_1 = 18$. Отсюда $7^2 - 18^2 = O_1Y^2 - O_1X^2 = (O_1Y^2 + O_1P^2) - (O_1X^2 + O_1P^2) = PY^2 - PX^2 = 25^2(1 - \nu^2 - 3\nu^2)$, или $-11 \cdot 25 = 25^2(1 - 4\nu^2)$, откуда $\nu = \frac{3}{5}$. Значит, $\angle SAB = \arccos\frac{AP}{AS} = \arccos\nu = \arccos\frac{3}{5}$.

Итак, $\ell = \frac{5a}{3}$, и из подобия имеем

$$\frac{14}{2a} = \frac{KL}{AB} = \frac{CX}{CP} = 1 - \frac{XP}{CP} = 1 - \frac{XY}{CS} = 1 - \frac{25}{\ell} = 1 - \frac{15}{a},$$

откуда $a = 22$ и $\ell = \frac{110}{3}$. Пусть PO_1 пересекает SC в точке H. Тогда PH – высота треугольника SCP, причём (поскольку $XY \parallel CS$) $\frac{CH}{CS} = \frac{XO_1}{XY} = \frac{18}{25}$. Значит, $CH = \frac{18}{25}SC = \frac{132}{5}$. Поскольку $O_2Q \perp XY$, HO_1O_2Q – прямоугольник, так что $HQ = O_1O_2 = 11$. Отсюда $CQ = CH - HQ = \frac{77}{5}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(3 балла)** Выведена или указана формула для модуля разности между корнями уравнения 1 балл;

2. **(6 баллов)** Получено равенство синуса и косинуса (как в решении) .... 2 балла;

   разобран случай, приводящий к ответу 1 или -1 .... 1 балл;

   разобран другой случай .... 3 балла.

   Внимание! В решении **НЕ** требуется доказывать, что случаи реализуются. За отсутствие доказательства баллы не снимаются.

3. **(5 баллов)** Посчитано количество чисел, дающих остатки 0, 1, 2 при делении на 3 ... 1 балл;

   найдено количество способов, когда все три остатка различны .... 2 балла;

   найдено количество способов, когда все три остатка одинаковы .... 2 балла;

   неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев (или учтены не все случаи) .. не более 3 баллов за задачу;

   если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 6 раз больше указанного в решении) .... баллы не снимаются;

   если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт, например, вместо $\frac{n(n+1)}{2}$ берётся $n(n+1)$ .... 0 баллов за рассматриваемый случай;

   ответ не приведён к числовому .... баллы не снимать.

4. **(7 баллов)** Найден отрезок HF .... 1 балл;

   найден отрезок AB .... 1 балл;

   найден отрезок HP .... 1 балл;

   найдены радиусы окружностей .... 4 балла.

5. **(6 баллов)** Нахождение ОДЗ отдельно не оценивается.

   За любое неэквивалентное на ОДЗ преобразование[1] .... 0 баллов за задачу;

   Неравенство преобразовано к виду $\frac{(\log_u w-1)(\log_u v-1)}{\log_u vw} \geqslant 0$ .... 2 балла;

   неравенство сведено к рациональному или системе рациональных неравенств .... 1 балл;

[1]Под неэквивалентным преобразованием понимается любое недопустимое действие с неравенством (ниже приведены примеры таких действий):

– умножение обеих частей на выражение неизвестного знака,

– неверные формулы при работе с логарифмами (сумма логарифмов – это логарифм суммы и пр.),

– переход $\log_a b \leqslant \log_c b \Leftrightarrow a \leqslant c$ или $\log_a b \geqslant \log_c b \Leftrightarrow a \leqslant c$,

– если осуществляется переход от логарифмического неравенства к рациональному, и при этом не учитывается, что основания логарифмов переменные (т.е. нет ни метода рационализации, ни рассмотрения случаев, когда основание логарифма больше/меньше 1: например, выполнен переход от неравенства $\log_x(f(x)) < \log_x(g(x))$ к неравенству $f(x) < g(x)$).

ответ отличается от верного конечным количеством точек .... снять по 1 баллу за каждую лишнюю/недостающую точку, но не более 3 баллов;

ответ отличается от верного более чем на конечное число точек .. не более 3 баллов за задачу.

6. **(6 баллов)** Составлено уравнение хотя бы одного серединного перпендикуляра .... 1 балл;

   за нахождение координат точек пересечения прямой и параболы .... баллы не добавляются.

7. **(7 баллов)** Доказано, что $KLMN$ – прямоугольник, стороны которого параллельны рёбрам пирамиды .... 2 балла;

   найден угол SAB .... 3 балла;

   найден отрезок CQ .... 2 балла.