МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

2. Решите неравенство
$$\sqrt{\sqrt{x+1}-2}+\sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}}>5.$$

3. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 10 – на стороне AB, 11 – на стороне BC, 12 – на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

4. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(50;30)$. Найдите количество таких квадратов.

6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} x^2-y^2\leqslant 2\,(x-y)\,, \\ x^2+y^2\leqslant 4\,(x+y-1)\,. \end{cases}$$
б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T\,(0;4)$ до ближайшей точки фигуры Φ.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP=2$, $MP=4$.

   а) Найдите отрезок DE.

   б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наибольшее значение увеличилось на $\frac{27}{2}$, а когда из него вычли $4x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если из него вычесть $2x^2$?

2. Решите неравенство
$$\sqrt{\sqrt{x-1}-3}+\sqrt{x+99-20\sqrt{x-1}}>5.$$

3. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 12 – на стороне AB, 9 – на стороне BC, 10 – на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

4. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 120° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55;25)$. Найдите количество таких квадратов.

6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} y^2-x^2\leqslant 3(x+y), \\ x^2+y^2\leqslant 6y-6x-9. \end{cases}$$
б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T(-6;0)$ до ближайшей точки фигуры Φ.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP=1$, $MP=3$.

   а) Найдите отрезок DE.

   б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 13 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 5 и 5. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

2. Решите неравенство
$$\sqrt{\frac{|x|-12}{2-x}} > x.$$

3. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 70$, $1 \leqslant b \leqslant 50$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$
такова, что число $2S$ кратно 5.

4. В треугольнике ABC известно, что $AB=3$, $AC=4$, $\angle BAC=60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C. (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

5. Дано число $5300\ldots0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

6. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 7.

   а) Найдите AC.

   б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK:KT:TA=6:1:7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

7. Изобразите на плоскости фигуру Φ, состоящую из точек $(x;y)$ координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3y^2+4x+4} \leqslant 2x+1, \\ x^2+y^2 \leqslant 4. \end{cases}$$
Определите, из скольких частей состоит фигура Φ.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 14 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения -9, -9 и -15. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

2. Решите неравенство
$$\sqrt{\frac{20-|x|}{x-3}} > x.$$

3. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 80$, $1 \leqslant b \leqslant 30$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$
такова, что число $2S$ кратно 5.

4. В треугольнике ABC известно, что $AB=4$, $AC=6$, $\angle BAC=60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C. (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

5. Дано число $800\ldots008$ (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 198. Сколькими способами это можно сделать?

6. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 4.

   а) Найдите AC.

   б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK:KT:TA=3:1:4$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

7. Изобразите на плоскости фигуру Φ, состоящую из точек $(x;y)$ координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств
$$\begin{cases} \sqrt{y^2-8x^2-6y+9} \leqslant 3y-1, \\ x^2+y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$
Определите, из скольких частей состоит фигура Φ.

БИЛЕТ 5

1. Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

Ответ. Увеличится на $\dfrac{3}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение, его старший коэффициент положителен, а само минимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a+1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c$. Если из $f(x)$ вычесть x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a-1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-4}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+1,\\ -\frac{b^2}{4a-4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+4}=1,\\ \frac{b^2}{4a-4}-\frac{b^2}{4a}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a(a+1)}=1,\\ \frac{b^2}{4a(a-1)}=3.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{a-1}{a+1}=\frac{1}{3}$, откуда $a=2$. Тогда $b^2=24$, а минимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{24}{8}+c=-3+c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить $2x^2$, то выйдет функция $(a+2)x^2+bx+c$, минимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+8}+c=-\frac{24}{16}+c=-\frac{3}{2}+c$, что на $\frac{3}{2}$ больше минимума исходной функции.

2. Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{x+1}-2}+\sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}}>5$.

Ответ. $x\in[3;\ 35)\cup(120;\ +\infty)$.

Решение. Заметим, что второе подкоренное выражение может быть записано в виде $\left(\sqrt{x+1}-9\right)^2$. Неравенство принимает вид $\sqrt{\sqrt{x+1}-2}+\left|\sqrt{x+1}-9\right|>5$. Обозначим $\sqrt{\sqrt{x+1}-2}=t$. Тогда получаем

$$t+\left|t^2-7\right|>5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2-7>5-t,\\ t^2-7<-5+t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2+t-12>0,\\ t^2-t-2<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\in(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)\,,\\ t\in(-1;\,2)\,.\end{array}\right.$$

Возвращаясь обратно к переменной x, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{\sqrt{x+1}-2}<-4,\\ \sqrt{\sqrt{x+1}-2}>3,\\ -1<\sqrt{\sqrt{x+1}-2}<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-2>9,\\ 0\leqslant\sqrt{x+1}-2<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1>121,\\ 4\leqslant x+1<36\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>120,\\ 3\leqslant x<35.\end{array}\right.$$

3. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 10 – на стороне AB, 11 – на стороне BC, 12 – на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Ответ. 4951.

Решение. Три точки из 33 данных можно выбрать $C_{33}^3=5456$ способами. При этом треугольник образуется во всех случаях за исключением того, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника. Итак, не подходят $C_{12}^3+C_{11}^3+C_{10}^3=220+165+120=505$ способов. Значит, всего есть $5456-505=4951$ треугольник.

4. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

Ответ. $\sqrt{3}:1$.

Решение. По теореме о вписанном угле угол DCA равен половине дуги AD, а угол DBC равен половине дуги CD. Значит, $\angle DCH=30^\circ$, $\angle HBC=45^\circ$. Тогда треугольник BHC – прямоугольный и равнобедренный, $BH=HC$. Но $HD=CH\operatorname{tg}30^\circ=\frac{CH}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $BH:HD=\sqrt{3}:1$.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(50; 30)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 930.

Решение. Проведём через данную точку $(50;30)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 50$ и $y = 30$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда "нижняя" вершина квадрата может быть расположена 30 способами: $(50;\ 0), (50;\ 1), \ldots, (50;\ 29)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 50$ и $y = 30$ разделяют плоскость. Рассмотрим "левую нижнюю" вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $20 \leqslant x \leqslant 49$, $0 \leqslant y \leqslant 29$. Получаем 30^2 способов.

Общее количество способов равно $30^2 + 30 = 31 \cdot 30 = 930$.

6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leqslant 2\,(x - y)\,, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4\,(x + y - 1)\,. \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T\,(0;4)$ до ближайшей точки фигуры Φ.

Ответ. $S = 2\pi$; $\rho = 2\sqrt{2} - 2$.

Решение. Преобразуем первое неравенство: $(x-y)(x+y) - 2(x-y) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2) \leqslant 0$. Оно задаёт два вертикальных угла, границами которых являются прямые $y = x$ и $y = 2 - x$ (точки $(0;\pm10)$ лежат внутри этих углов). Второе неравенство может быть переписано в виде $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4$. Оно задаёт круг с центром $G(2;\ 2)$ радиуса 2. Пересечение этих двух множеств и есть искомое множество.

Фигура Φ составляет ровно половину круга радиуса 2, поэтому её площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi$. Отметим точку E пересечения отрезка GT с окружностью. TE – это и есть кратчайшее расстояние от точки T до фигуры Φ. $TE = TG - GE = 2\sqrt{2} - 2$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 2$, $MP = 4$.

а) Найдите отрезок DE.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

Ответ. а) $DE = 8$; б) $R = 2\sqrt{85}$.

Решение. а) По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD : DB = AM : MB$, $CE : EB = CM : MB$, а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что $AD : DB = CE : EB$, поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник PDM – равнобедренный и $DP = MP = 4$. Аналогично получаем, что $EP = 4$ и тогда $DE = 8$.

б) Трапеция $ADEC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая. Отрезок PM, соединяющий середины оснований трапеции, им перпендикулярен. Из подобия прямоугольных треугольников BPD и BMA находим, что $MA = PD \cdot \frac{MP}{MB} = 12$. Пусть EH – высота трапеции. Тогда $AH = AM + MH = AM + PE = 16$, $AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 4\sqrt{17}$, $CH = CM - MH = 8$, $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = 4\sqrt{5}$, $\sin\angle HCE = \frac{EH}{EC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Данная окружность является описанной около треугольника ACE, поэтому её радиус R равен $\frac{AE}{2\sin\angle ACE} = 2\sqrt{85}$.

БИЛЕТ 6

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наибольшее значение увеличилось на $\dfrac{27}{2}$, а когда из него вычли $4x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если из него вычесть $2x^2$?

Ответ. Уменьшится на $\dfrac{27}{4}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наибольшее значение, его старший коэффициент отрицателен, а само максимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a+1)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c$. Если из $f(x)$ вычесть $4x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a-4)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-16}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+\frac{27}{2},\\ -\frac{b^2}{4a-16}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+4}=\frac{27}{2},\\ \frac{b^2}{4a-16}-\frac{b^2}{4a}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a(a+1)}=\frac{27}{2},\\ \frac{b^2}{a(a-4)}=9.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{a-4}{4(a+1)}=\frac{3}{2}$, откуда $a=-2$. Тогда $b^2=108$, а максимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{108}{-8}+c=\frac{27}{2}+c$. Если из квадратного трёхчлена $f(x)$ вычесть $2x^2$, то выйдет функция $(a-2)x^2+bx+c$, максимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a-8}+c=-\frac{108}{-16}+c=\frac{27}{4}+c$, что на $\frac{27}{4}$ меньше максимума исходной функции.

2. Решите неравенство $\sqrt{\sqrt{x-1}-3}+\sqrt{x+99-20\sqrt{x-1}}>5$.

Ответ. $x\in[10;\ 50)\cup(145;\ +\infty)$.

Решение. Заметим, что второе подкоренное выражение может быть записано в виде $\left(\sqrt{x-1}-10\right)^2$. Неравенство принимает вид $\sqrt{\sqrt{x-1}-3}+\left|\sqrt{x-1}-10\right|>5$. Обозначим $\sqrt{\sqrt{x-1}-3}=t$. Тогда получаем

$$t+\left|t^2-7\right|>5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2-7>5-t,\\ t^2-7<-5+t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2+t-12>0,\\ t^2-t-2<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\in(-\infty;-4)\cup(3;+\infty),\\ t\in(-1;\ 2).\end{array}\right.$$

Возвращаясь обратно к переменной x, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{\sqrt{x-1}-3}<-4,\\ \sqrt{\sqrt{x-1}-3}>3,\\ -1<\sqrt{\sqrt{x-1}-3}<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}-3>9,\\ 0\leqslant\sqrt{x-1}-3<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1>144,\\ 9\leqslant x-1<49\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>145,\\ 10\leqslant x<50.\end{array}\right.$$

3. На сторонах треугольника ABC отметили точки: 12 – на стороне AB, 9 – на стороне BC, 10 – на стороне AC. При этом ни одна из вершин треугольника не отмечена. Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

Ответ. 4071.

Решение. Три точки из 31 данной можно выбрать $C_{31}^3=4495$ способами. При этом треугольник образуется во всех случаях за исключением того, когда все три точки лежат на одной стороне треугольника. Итак, не подходят $C_{12}^3+C_9^3+C_{10}^3=220+84+120=424$ способа. Значит, всего есть $4495-424=4071$ треугольник.

4. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 120° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

Ответ. $1:\sqrt{3}$.

Решение. По теореме о вписанном угле угол DCA равен половине дуги AD, а угол DBC равен половине дуги CD. Значит, $\angle DCH=60^\circ$, $\angle HBC=45^\circ$. Тогда треугольник BHC – прямоугольный и равнобедренный, $BH=HC$. Но $HD=CH\operatorname{tg}60^\circ=CH\sqrt{3}$. Следовательно, $BH:HD=1:\sqrt{3}$.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 25)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 600.

Решение. Проведём через данную точку $(55; 25)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 55$ и $y = 25$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда “нижняя” вершина квадрата может быть расположена 24 способами: $(55;\ 1), (55;\ 2), \ldots, (55;\ 24)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 55$ и $y = 25$ разделяют плоскость. Рассмотрим “левую нижнюю” вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $31 \leqslant x \leqslant 54$, $1 \leqslant y \leqslant 24$. Получаем 24^2 способов.

Общее количество способов равно $24^2 + 24 = 24 \cdot 25 = 600$.

6. а) Изобразите на координатной плоскости фигуру Φ, координаты точек которой удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \leqslant 3\,(x + y)\,, \\ x^2 + y^2 \leqslant 6y - 6x - 9. \end{cases}$$

б) Найдите площадь фигуры Φ и расстояние от точки $T\,(-6; 0)$ до ближайшей точки фигуры Φ.

Ответ. $S = \dfrac{9\pi}{2}$; $\rho = 3\sqrt{2} - 3$.

Решение. Преобразуем первое неравенство: $(y - x)(y + x) - 3(y + x) \leqslant 0 \Leftrightarrow (y + x)(y - x - 3) \leqslant 0$. Оно задаёт два вертикальных угла, границами которых являются прямые $y = x$ и $y = 2 - x$ (точки $(\pm 10;\ 0)$ лежат внутри этих углов). Второе неравенство может быть переписано в виде $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 \leqslant 9$. Оно задаёт круг с центром $G(-3;\ 3)$ радиуса 3. Пересечение этих двух множеств и есть искомое множество.

Фигура Φ составляет ровно половину круга радиуса 3, поэтому её площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 9\pi = \frac{9\pi}{2}$. Отметим точку E пересечения отрезка GT с окружностью. TE – это и есть кратчайшее расстояние от точки T до фигуры Φ. $TE = TG - GE = 3\sqrt{2} - 3$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 1$, $MP = 3$.

а) Найдите отрезок DE.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

Ответ. а) $DE = 6$; б) $R = 3\sqrt{65}$.

Решение. а) По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD : DB = AM : MB$, $CE : EB = CM : MB$, а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что $AD : DB = CE : EB$, поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник PDM – равнобедренный и $DP = MP = 3$. Аналогично получаем, что $EP = 3$ и тогда $DE = 6$.

б) Трапеция $ADEC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая. Отрезок PM, соединяющий середины оснований трапеции, им перпендикулярен. Из подобия прямоугольных треугольников BPD и BMA находим, что $MA = PD \cdot \frac{MP}{MB} = 12$. Пусть EH – высота трапеции. Тогда $AH = AM + MH = AM + PE = 15$, $AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 3\sqrt{26}$, $CH = CM - MH = 9$, $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = 3\sqrt{10}$, $\sin \angle HCE = \frac{EH}{EC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Данная окружность является описанной около треугольника ACE, поэтому её радиус R равен $\frac{AE}{2 \sin \angle ACE} = 3\sqrt{65}$.

БИЛЕТ 13

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 5 и 5. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

Ответ. $\frac{39}{8}$.

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n + 1{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\left(x - n - 1{,}5\right)^2 + c$. Так как $f(n) = 6$, $f(n+1) = 5$, то получаем $\frac{9}{4}a + c = 6$, $\frac{a}{4} + c = 5$, откуда $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{39}{8}$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наименьшее значение функции.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{|x|-12}{2-x}} > x.$$

Ответ. $x \in (-\infty; -12] \cup (2; 3)$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условием $\frac{|x|-12}{2-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-12)(x+12)}{2-x} \geqslant 0$. С помощью метода интервалов получаем $x \in (-\infty; -12] \cup (2; 12]$. На промежутке $x \in (-\infty; -12]$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, поэтому оно выполняется.

Рассмотрим промежуток $x \in (2; 12]$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и их можно возвести в квадрат: $\frac{|x|-12}{2-x} > x^2$. Так как рассматриваются значения x, большие 2, то знаменатель дроби отрицателен – можно умножить на него обе части неравенства и поменять знак. Кроме того, модуль можно опустить. Получаем $x - 12 < x^2(2-x) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x - 12 < 0$. Одним из корней многочлена в левой части является $x = 3$. Выделяем множитель $x - 3$, и тогда неравенство принимает вид $(x-3)\left(x^2 + x + 4\right) < 0$, откуда $x < 3$. Значит, в этом случае $2 < x < 3$ и окончательно $x \in (-\infty; -12] \cup (2; 3)$.

3. Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 70$, $1 \leqslant b \leqslant 50$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

Ответ: 1260.

Решение. Данная система неравенств задаёт на плоскости треугольник с вершинами $(a; 0)$, $(0; b)$ и $(a; b)$. Этот треугольник прямоугольный, его удвоенная площадь равна произведению катетов, т.е. ab. По условию $ab \,\vdots\, 5$, поэтому одно из чисел a или b должно делиться на 5.

При указанных ограничениях есть 14 значений a и 10 значений b, кратных 5. Значит, существует $14 \cdot 50 = 700$ пар $(a; b)$ таких, что $a \,\vdots\, 5$ и $10 \cdot 70 = 700$ пар таких, что $b \,\vdots\, 5$. Кроме того, есть $14 \cdot 10 = 140$ пар таких, что оба числа a и b делятся на 5. Тогда всего искомых пар $700 + 700 - 140 = 1260$.

4. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C. (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

Ответ: $S_{\triangle OA_2C} = \frac{13}{4\sqrt{3}}$; $S_{\triangle A_1A_2C} = \frac{13}{7\sqrt{3}}$.

Решение. По теореме косинусов для треугольника ABC находим, что $BC^2 = 16 + 9 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 13$, $BC = \sqrt{13}$. Тогда по теореме синусов радиус окружности R равен $\frac{BC}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$. Угол A_2OC – центральный, поэтому он вдвое больше угла A_2AC, который по условию равен 30°, поэтому $\angle A_2OC = 60^\circ$. Тогда площадь треугольника OA_2C равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 = \frac{13}{4\sqrt{3}}$.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $A_1C : A_1B = AC : AB = 4 : 3$, откуда $A_1C = \frac{4}{7}BC = \frac{4}{7}\sqrt{13}$. Треугольник OA_2C – равносторонний, поэтому $A_2C = R$. Углы A_2CA_1 и A_2AB равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, поэтому $\angle A_2CA_1 = 30^\circ$. Значит, $S_{A_1A_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}\sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{13}{7\sqrt{3}}$.

5. Дано число $5300\ldots0035$ (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ. 22100.

Решение. $495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$. Делимость на 5 выполнена в любом случае, так как число оканчивается пятёркой. Для исследования делимости на 11 существенно, на каких позициях стоят заменяемые цифры.

Первый случай. Заменяем два нуля на местах одной чётности (оба чётные или оба нечётные). Для делимости на 11 нужно, чтобы сумма двух новых цифр делилась на 11, а так как каждая цифра заключена в пределах $[1;9]$, то сумма должна быть равна 11. Заметим, что делимость на 9 при этом автоматически выполняется (сумма цифр числа равна $16+11=27$). Подходят следующие пары цифр: $2--9$, $3--8$, $4--7$, $5--6$. Подсчитаем количество способов осуществить замену. Сначала выбираем одну из этих четырёх пар цифр (4 способа), затем ставим меньшую цифру на место любого из нулей (100 способов); наконец на место той же самой чётности ставим бо́льшую цифру (49 способов) – итого выходит $4 \cdot 100 \cdot 49 = 19600$ способов.

Второй случай. Заменяем два нуля на местах разной чётности. Тогда для делимости на 11 требуется, чтобы эти цифры были одинаковыми (обозначим каждую из них через k), а для делимости на 9 надо, чтобы $16+2k \,\vdots\, 9$. Этому условию удовлетворяет только $k=1$. Такая замена может быть осуществлена $50 \cdot 50 = 2500$ способами (выбираем одно из пятидесяти чётных мест и одно из пятидесяти нечётных).

В сумме получаем $19600 + 2500 = 22100$ способов.

6. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 7.

а) Найдите AC.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

Ответ. а) $AC = 14$; б) $\angle DAC = 45^\circ$, $S_{ABCD} = 97$.

Решение. а) Подобие треугольников эквивалентно равенству всех их углов. Так как угол при вершине A у треугольников общий, то есть два варианта: либо $\angle ABQ = \angle ADP$, $\angle AQB = \angle APD$, либо $\angle ABQ = \angle APD$, $\angle AQB = \angle ADP$. Второй случай невозможен, так как $\angle ADP$ – внешний угол треугольника CDQ, поэтому он равен сумме $\angle DCQ + \angle DQC$, т.е. $\angle ADP > \angle AQB$. Тогда остаётся первый случай и $\angle ABC = \angle ADC$. Но четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а значит, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, откуда $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Следовательно, AC – диаметр окружности, $AC = 14$.

б) Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC соответственно в точках M и N, а окружность, вписанная в треугольник ACD, касается его сторон AD и CD соответственно в точках L и G. Заметим, что при дополнительном условии $AT = TC$. По свойству отрезков касательных к окружности $AL = AT = TC = CG$, $DG = DL$. Поэтому треугольник ACD – равнобедренный, а так как $\angle D = 90^\circ$, то $\angle DAC = 45^\circ$. Площадь треугольника ACD равна $0{,}5AC \cdot DT = 49$.

Применим теперь для треугольника ABC свойство касательных: $CN = CK = 6$, $AM = AK = 8$; пусть $BN = BM = x$. По теореме Пифагора для треугольника ABC получаем $196 = (x+8)^2 + (x+6)^2$, $x^2 + 14x - 48 = 0$, $x = \sqrt{97} - 7$. Тогда $AB = \sqrt{97} + 1$, $BC = \sqrt{97} - 1$ и площадь треугольника ABC равна $0{,}5AB \cdot BC = 48$. Значит, площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $49 + 48 = 97$.

7. Изобразите на плоскости фигуру Φ, состоящую из точек $(x;y)$ координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3y^2 + 4x + 4} \leqslant 2x + 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 4. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура Φ.

Решение. Первое неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 4x + 4 \leqslant 4x^2 + 4x + 1, \\ (x+2)^2 - 3y^2 \geqslant 0, \\ 2x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ \left(x + 2 - y\sqrt{3}\right)\left(x + 2 + y\sqrt{3}\right) \geqslant 0, \\ x \geqslant -0{,}5. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств вместе со вторым неравенством исходной системы определяет множество точек, находящихся между двумя концентрическими окружностями с центром в $(0;0)$ радиусов 1 и 2. Третье неравенство задаёт полуплоскость справа от прямой $x = -0{,}5$. Второе неравенство определяет два вертикальных угла, границами которых являются прямые ℓ_1 и ℓ_2 с уравнениями $y = \pm\frac{x+2}{\sqrt{3}}$ (такие два угла, что точка $(0;0)$ лежит внутри одного из них). При этом прямые ℓ_1 и ℓ_2 обе проходят через точку $(-2;0)$, лежащую на большей окружности, и касаются меньшей окружности в точках $\left(-\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (координаты точек касания могут быть найдены путём решения соответствующих систем уравнений).

Пересекая все указанные множества, получаем фигуру Φ, состоящую, как несложно видеть, из одной части.

БИЛЕТ 14

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения -9, -9 и -15. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

Ответ. $-\dfrac{33}{4}$.

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n + 0{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\,(x - n - 0{,}5)^2 + c$. Так как $f(n) = -9$, $f(n+2) = -15$, то получаем $\frac{a}{4} + c = -9$, $\frac{9a}{4} + c = -15$, откуда $a = -3$, $c = -\frac{33}{4}$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наибольшее значение функции.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{20 - |x|}{x - 3}} > x.$$

Ответ. $x \in (-\infty; -20] \cup (3; 4)$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условием $\frac{20-|x|}{x-3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(20-x)(20+x)}{x-3} \geqslant 0$. С помощью метода интервалов получаем $x \in (-\infty; -20] \cup (3; 20]$. На промежутке $x \in (-\infty; -20]$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, поэтому оно выполняется.

Рассмотрим промежуток $x \in (3; 20]$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и их можно возвести в квадрат: $\frac{20-|x|}{x-3} > x^2$. Так как рассматриваются значения x, большие 3, то знаменатель дроби положителен – можно умножить на него обе части неравенства. Кроме того, модуль можно опустить. Получаем $20 - x > x^2(x-3) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - 20 < 0$. Одним из корней многочлена в левой части является $x = 4$. Выделяем множитель $x - 4$, и тогда неравенство принимает вид $(x-4)\left(x^2 + x + 5\right) < 0$, откуда $x < 4$. Значит, в этом случае $3 < x < 4$ и окончательно $x \in (-\infty; -20] \cup (3; 4)$.

3. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 80$, $1 \leqslant b \leqslant 30$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

Ответ: 864.

Решение. Данная система неравенств задаёт на плоскости треугольник с вершинами $(a;0)$, $(0;b)$ и $(a;b)$. Этот треугольник прямоугольный, его удвоенная площадь равна произведению катетов, т.е. ab. По условию $ab \,\vdots\, 5$, поэтому одно из чисел a или b должно делиться на 5.

При указанных ограничениях есть 16 значений a и 6 значений b, кратных 5. Значит, существует $16 \cdot 30 = 480$ пар $(a;b)$ таких, что $a \,\vdots\, 5$ и $6 \cdot 80 = 480$ пар таких, что $b \,\vdots\, 5$. Кроме того, есть $16 \cdot 6 = 96$ пар таких, что оба числа a и b делятся на 5. Тогда всего искомых пар $480 + 480 - 96 = 864$.

4. В треугольнике ABC известно, что $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C. (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

Ответ: $S_{\triangle OA_2C} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$; $S_{\triangle A_1A_2C} = \dfrac{7\sqrt{3}}{5}$.

Решение. По теореме косинусов для треугольника ABC находим, что $BC^2 = 16 + 36 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 28$, $BC = \sqrt{28}$. Тогда по теореме синусов радиус окружности R равен $\frac{BC}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}}$. Угол A_2OC – центральный, поэтому он вдвое больше угла A_2AC, который по условию равен 30°, поэтому $\angle A_2OC = 60^\circ$. Тогда площадь треугольника OA_2C равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $A_1C : A_1B = AC : AB = 6 : 4$, откуда $A_1C = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5}\sqrt{28}$. Треугольник OA_2C – равносторонний, поэтому $A_2C = R$. Углы A_2CA_1 и A_2AB равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, поэтому $\angle A_2CA_1 = 30^\circ$. Значит, $S_{A_1A_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{28} \cdot \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{5}$.

5. Дано число $800\ldots008$ (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 198. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ. 14080.

Решение. $198 = 2 \cdot 9 \cdot 11$. Делимость на 2 выполнена в любом случае, так как число оканчивается восьмёркой. Для исследования делимости на 11 существенно, на каких позициях стоят заменяемые цифры.

Первый случай. Заменяем два нуля на местах одной чётности (оба чётные или оба нечётные). Для делимости на 11 нужно, чтобы сумма двух новых цифр делилась на 11, а так как каждая цифра заключена в пределах $[1;9]$, то сумма должна быть равна 11. Заметим, что делимость на 9 при этом автоматически выполняется (сумма цифр числа равна $16+11=27$). Подходят следующие пары цифр: $2--9$, $3--8$, $4--7$, $5--6$. Подсчитаем количество способов осуществить замену. Сначала выбираем одну из этих четырёх пар цифр (4 способа), затем ставим меньшую цифру на место любого из нулей (80 способов); наконец на место той же самой чётности ставим бóльшую цифру (39 способов) – итого выходит $4 \cdot 80 \cdot 39 = 12480$ способов.

Второй случай. Заменяем два нуля на местах разной чётности. Тогда для делимости на 11 требуется, чтобы эти цифры были одинаковыми (обозначим каждую из них через k), а для делимости на 9 надо, чтобы $16+2k \,\vdots\, 9$. Этому условию удовлетворяет только $k=1$. Такая замена может быть осуществлена $40 \cdot 40 = 1600$ способами (выбираем одно из пятидесяти чётных мест и одно из пятидесяти нечётных).

В сумме получаем $12480 + 1600 = 14080$ способов.

6. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD пересекаются в точке Q. Известно, что треугольники ADP и QAB подобны (*вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке*), а четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность радиуса 4.

а) Найдите AC.

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD касаются отрезка AC в точках K и T соответственно, причём $CK : KT : TA = 3 : 1 : 4$ (точка T лежит между K и A). Найдите $\angle DAC$ и площадь четырёхугольника $ABCD$.

Ответ. а) $AC = 8$; б) $\angle DAC = 45^\circ$, $S_{ABCD} = 31$.

Решение. а) Подобие треугольников эквивалентно равенству всех их углов. Так как угол при вершине A у треугольников общий, то есть два варианта: либо $\angle ABQ = \angle ADP$, $\angle AQB = \angle APD$, либо $\angle ABQ = \angle APD$, $\angle AQB = \angle ADP$. Второй случай невозможен, так как $\angle ADP$ – внешний угол треугольника CDQ, поэтому он равен сумме $\angle DCQ + \angle DQC$, т.е. $\angle ADP > \angle AQB$. Тогда остаётся первый случай и $\angle ABC = \angle ADC$. Но четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а значит, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, откуда $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Следовательно, AC – диаметр окружности, $AC = 8$.

б) Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и BC соответственно в точках M и N, а окружность, вписанная в треугольник ACD, касается его сторон AD и CD соответственно в точках L и G. Заметим, что при дополнительном условии $AT = TC$. По свойству отрезков касательных к окружности $AL = AT = TC = CG$, $DG = DL$. Поэтому треугольник ACD – равнобедренный, а так как $\angle D = 90^\circ$, то $\angle DAC = 45^\circ$. Площадь треугольника ACD равна $0{,}5 AC \cdot DT = 16$.

Применим теперь для треугольника ABC свойство касательных: $CN = CK = 3$, $AM = AK = 5$; пусть $BN = BM = x$. По теореме Пифагора для треугольника ABC получаем $64 = (x+5)^2 + (x+3)^2$, $x^2 + 8x - 15 = 0$, $x = \sqrt{31} - 4$. Тогда $AB = \sqrt{31} + 1$, $BC = \sqrt{31} - 1$ и площадь треугольника ABC равна $0{,}5 AB \cdot BC = 15$. Значит, площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $16 + 15 = 31$.

7. Изобразите на плоскости фигуру Φ, состоящую из точек $(x;y)$ координатной плоскости таких, что выполнена система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 8x^2 - 6y + 9} \leqslant 3y - 1, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Определите, из скольких частей состоит фигура Φ.

Решение. Первое неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} y^2 - 8x^2 - 6y + 9 \leqslant 9y^2 - 6y + 1, \\ (y-3)^2 - 8x^2 \geqslant 0, \\ 3y - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ \left(y - 3 - 2x\sqrt{2}\right)\left(y - 3 + 2x\sqrt{2}\right) \geqslant 0, \\ y \geqslant \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств вместе со вторым неравенством исходной системы определяет множество точек, находящихся между двумя концентрическими окружностями с центром в $(0;0)$ радиусов 1 и 2. Третье неравенство задаёт полуплоскость сверху от прямой $y = \frac{1}{3}$. Второе неравенство определяет два вертикальных угла, границами которых являются прямые ℓ_1 и ℓ_2 с уравнениями $y = 3 \pm 2x\sqrt{2}$ (такие два угла, что точка $(0;0)$ лежит внутри одного из них). При этом прямые ℓ_1 и ℓ_2 обе проходят через точку $(3;0)$ и касаются меньшей окружности в точках $\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$ (координаты точек касания могут быть найдены путём решения соответствующих систем уравнений).

Пересекая все указанные множества, получаем фигуру Φ, состоящую, как несложно видеть, из одной части.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу.

1. (5 баллов) верно составлены уравнения на коэффициенты трёхчлена – 2 балла.

Найдены коэффициенты трёхчлена – 2 балла.

Не проверено, что в вершине параболы действительно достигается максимум (минимум) – баллы не снимаются.

Если вместо $y_{\text{вершины}}$ исследуется значение $x_{\text{вершины}}$, то 0 баллов за задачу.

2. (6 баллов) Под вторым корнем выделен полный квадрат. Корень заменён на модуль – 2 балла.

За разбор каждого из двух случаев раскрытия модуля – 2 балла. Если при этом совершено неэквивалентное преобразование неравенства – 0 баллов за случай.

Потерян модуль при извлечении корня, но полученное иррациональное неравенство решено верно – 2 балла за задачу.

3. (5 баллов) Верно описано множество всех искомых треугольников – 1 балл.

Разобран только случай, когда на каждой стороне исходного треугольника находится по одной вершине нового треугольника – 1 балл.

Если задача решается разбором случаев и при этом хотя бы один случай пропущен или рассмотрен существенно неверно – не более 3 баллов за задачу.

4. (5 баллов) Найдены угол B треугольника ABC – 1 балл.

Найдены углы A и C треугольника ABC – 1 балл.

5. (5 баллов) Верно выделено множество возможных положений вершин(ы) искомых квадратов – 3 балла.

Верный подсчёт – 2 балла (*если в произведении $a \cdot b$ один или оба множителя отличаются от верного на 1, то 1 балл вместо 2*).

6. (7 баллов) Изображено множество решений первого неравенства – 3 балла.

Изображено множество решений второго неравенства – 1 балл.

Найдена площадь – 1 балл.

Найдено расстояние – 2 балла.

7. (7 баллов) Доказано, что $DE || AC$ – 2 балла.

Найден отрезок DE – 2 балла.

Если в пункте а) параллельность DE и AC утверждается без доказательства, то снять 1 балл.

Решён пункт б) – 3 балла.

То, что трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной, можно использовать без доказательства!

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу.

1. (5 баллов) Трёхчлен представлен в виде $(x-n)(x-(n+1))+c$ или в виде $a(x-x_1)^2+c$ (сделан подходящий сдвиг параболы) – 2 балла.

При решении "в лоб" с нахождением коэффициентов многочлена ax^2+bx+c :
– составлена система для нахождения a, b, c, n – 1 балл;
– найден коэффициент a – 1 балл;
– выписано выражение для минимума (максимума) в терминах a, b, n – 1 балл.

2. (6 баллов) За каждый из случаев $x \geqslant 0$, $x<0$ – по 3 балла.
Неэквивалентное преобразование – 0 баллов за задачу или за рассматриваемый случай.
Ответ отличается от верного конечным числом точек – снять 1 балл.

3. (4 балла) Изображено множество точек, удовлетворяющих системе неравенств – 1 балл.
Указано, что условие $2S \vdots 5$ эквивалентно условию $ab \vdots 5$ – 1 балл.
Подсчитано количество вариантов – 2 балла.

4. (6 баллов) Найден отрезок BC –1 балл.
Найден радиус окружности –1 балл.
Доказано, что треугольник OA_2C – равносторонний и найдена его площадь – 1 балл.
Найдена площадь треугольника A_1A_2C – 3 балла.

5. (6 баллов) Изучена делимость на 2 или 5 – баллы не добавляются.

Случай цифр на местах разной четности (3 балла): получено, что эти цифры одинаковые (использован признак делимости на 11) – 1 балл, найдены эти цифры (использован признак делимости на 3 или 9) – 1 балл, сделан верный комбинаторный подсчет – 1 балл.

Случай цифр на местах разной четности (3 балла): получены верные комбинации цифр (использован признак делимости на 11 и проверен признак делимости на 3 или 9) – 2 балла, сделан верный комбинаторный подсчет – 1 балл.

6. (7 баллов) Доказано, какие из углов подобных треугольников являются равными – 1 балл.
Найдены прямые углы – 1 балл.
Найдена диагональ – 1 балл.
Найден угол 45° – 1 балл.
Найдена площадь – 3 балла.

7. (6 баллов) Изображено множество точек, удовлетворяющих первому неравенству системы – 4 балла.

За изображение второго множества (круг) баллы не ставятся.

Правильно изображено взаимное расположение двух множеств (прямые, ограничивающие первое множество, касаются окружности, являющейся границей второго множества) – 2 балла.