МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 1$ и $y = f(x)$ равно $3\sqrt{2}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) - 2$ равно $\sqrt{10}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x - 1)\cos y} = \dfrac{2}{5} + \cos^2(x+y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin y} = \dfrac{3}{5} + \sin^2(x+y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x + 3y)$, если известно, что их не менее двух.

3. Есть 207 различных карточек с числами $1, 2, 3, 2^2, 3^2, \ldots, 2^{103}, 3^{103}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 6?

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 2 : 3$.

   а) Найдите AP.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1 + 27x^5\right) + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1 + x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1 + 27x^5\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y\sin 2a - x\cos 2a), \\ x^2 + y^2 = 26(y\cos 3a - x\sin 3a) \end{cases}$$

   существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 10.

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 – равносторонний. На ребре CC_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника ABA_1 и касается отрезка CC_1 в точке M.

   а) Найдите длину ребра AB.

   б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ABA_1, а также длину ребра A_1C_1.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 14 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2-1$ и $y=f(x)$ равно $\sqrt{34}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2+1$ и $y=f(x)+3$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y=x^2$ и $y=f(x)-1$.

2. Известно, что $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x+1)\sin 2y}=\dfrac{1}{5}+\cos^2(x-2y)$ и $\dfrac{\cos 3x}{(1-2\cos 2x)\cos 2y}=\dfrac{4}{5}+\sin^2(x-2y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x-6y)$, если известно, что их не менее двух.

3. Есть 183 различные карточки с числами $1,\ 2,\ 11,\ 2^2,\ 11^2,\ldots,2^{91},\ 11^{91}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 22?

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 3. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL:LC=1:3$.

   а) Найдите AP.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1-8x^5\right)+\log_{1-x^2+8x^4}\left(1+x^2\right)\leqslant 1+\log_{1-x^2+8x^4}\left(1-8x^5\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=10(x\cos 4a+y\sin 4a),\\ x^2+y^2=10(x\sin a+y\cos a)\end{cases}$$

   существуют два решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1;y_1)$ и $Q(x_2;y_2)$ равно 6.

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC\parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник BB_1C – равносторонний. На ребре AA_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка N такая, что $AN:NA_1=1:2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника BB_1C и касается отрезка AA_1 в точке N.

   а) Найдите длину ребра BB_1.

   б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC=\arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BB_1C, а также длину ребра A_1B_1.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 15 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2-2$ и $y=f(x)$ равно $\sqrt{26}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2$ и $y=f(x)+1$ равно $3\sqrt{2}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y=x^2$ и $y=f(x)$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x-1)\cos y}=\dfrac{2}{3}+\cos^2(x-y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x+1)\sin y}=-\dfrac{1}{3}-\sin^2(x-y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x-3y)$, если известно, что их не менее двух.

3. Есть 195 различных карточек с числами $1, 5, 7, 5^2, 7^2, \ldots, 5^{97}, 7^{97}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 35?

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 5. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 2$.

   а) Найдите AP.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 6,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1+8x^5\right)+\log_{1-3x^2+16x^4}\left(1+x^2\right)\leqslant 1+\log_{1-3x^2+16x^4}\left(1+8x^5\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=26(y\sin a-x\cos a),\\ x^2+y^2=26(y\cos 2a-x\sin 2a) \end{cases}$$

   существуют два решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1;y_1)$ и $Q(x_2;y_2)$ равно 24.

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 – равносторонний. На ребре CC_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{7}$ проходит через вершины треугольника AA_1B и касается отрезка CC_1 в точке M.

   а) Найдите длину ребра AB.

   б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите угол между прямой C_1C и плоскостью AA_1B, а также длину ребра A_1C_1.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 16 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2+2$ и $y=f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2-1$ и $y=f(x)+1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y=x^2$ и $y=f(x)+1$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x-1)\cos 2y}=\dfrac{1}{6}+\sin^2(x+2y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x+1)\sin 2y}=\dfrac{5}{6}+\cos^2(x+2y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x+6y)$, если известно, что их не менее двух.

3. Есть 167 различных карточек с числами $1,\ 3,\ 11,\ 3^2,\ 11^2,\ldots,3^{83},\ 11^{83}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 33?

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 8. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL:LC=1:5$.

   а) Найдите AP.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1-27x^5\right)+\log_{1-3x^2+36x^4}\left(1+x^2\right)\leqslant 1+\log_{1-3x^2+36x^4}\left(1-27x^5\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=10(x\cos a+y\sin a),\\ x^2+y^2=10(x\sin 3a+y\cos 3a)\end{cases}$$

   существуют два решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1;y_1)$ и $Q(x_2;y_2)$ равно 8.

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник BB_1C – равносторонний. На ребре AA_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка N такая, что $AN:NA_1=1:2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{7}$ проходит через вершины треугольника BB_1C и касается отрезка AA_1 в точке N.

   а) Найдите длину ребра BB_1.

   б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BB_1C, а также длину ребра A_1B_1.

Билет 13

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2+1$ и $y=f(x)$ равно $3\sqrt{2}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2$ и $y=f(x)-2$ равно $\sqrt{10}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y=x^2$ и $y=f(x)$.

   Ответ: $\sqrt{26}$.

   Решение. Пусть $f(x)=ax+b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2+1=ax+b$, а во втором случае – из уравнения $x^2=ax+b-2$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2-ax-(b-1)=0$, откуда $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b-4}}{2}$, $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4b-4}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2-x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(a^2+4b-4\right)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(a^2+4b-8\right)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases}\left(a^2+1\right)\left(a^2+4b-4\right)=18,\\ \left(a^2+1\right)\left(a^2+4b-8\right)=10,\end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2=1$, $b=3$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2-ax-b=0$, поэтому $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4b}=\sqrt{13}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2-x_1|\sqrt{a^2+1}=\sqrt{13}\sqrt{2}=\sqrt{26}$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x-1)\cos y}=\dfrac{2}{5}+\cos^2(x+y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x+1)\sin y}=\dfrac{3}{5}+\sin^2(x+y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x+3y)$, если известно, что их не менее двух.

   Ответ: -1 или $\frac{1}{5}$.

   Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\cos 2x\cos x-2\sin^2 x\cos x=\\
&\qquad=\cos 2x\cos x-(1-\cos 2x)\cos x=(2\cos 2x-1)\cos x,\\
&\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x=\\
&\qquad=2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos 2x=\sin x(1+\cos 2x)+\sin x\cos 2x=(2\cos 2x+1)\sin x.
\end{aligned}$$

   С учётом этого данные в условии равенства принимают вид

$$\begin{cases}\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{2}{5}+\cos^2(x+y),\\ \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{3}{5}+\sin^2(x+y)\end{cases}\tag{1}$$

   (необходимо также учесть, что $\cos 2x\neq\pm\frac{1}{2}$). Складываем равенства (**??**) и получаем $\frac{\cos x}{\cos y}+\frac{\sin x}{\sin y}=2$, откуда $\cos y\neq 0$, $\sin y\neq 0$ и $\cos x\sin y+\sin x\cos y=2\sin y\cos y$. Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\sin(x+y)=\sin 2y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=2y+2\pi k,\\ x+y=\pi-2y+2\pi k,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y+2\pi k,\\ x=\pi-3y+2\pi k,k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

   Рассмотрим эти две возможности отдельно.

   Если $x=y+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, то система (**??**) принимает вид $\begin{cases}1=\frac{2}{5}+\cos^2 2y,\\ 1=\frac{3}{5}+\sin^2 2y;\end{cases}$ отсюда $\sin^2 2y=\frac{2}{5}$, $\cos^2 2y=\frac{3}{5}$. Несложно видеть, что эта система имеет решения. При этом $\cos(x+3y)=\cos 4y=2\cos^2 2y-1=2\cdot\frac{3}{5}-1=-\frac{1}{5}$.

   Если $x=\pi-3y+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, то (**??**) принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{\cos 3y}{\cos y} = \frac{2}{5} + \cos^2 2y, \\ \frac{\sin 3y}{\sin y} = \frac{3}{5} + \sin^2 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4\cos^2 y = \frac{2}{5} + \cos^2 2y, \\ 3 - 4\sin^2 y = \frac{3}{5} + \sin^2 2y. \end{cases}$$

Каждое из уравнений последней системы приводится к уравнению $\cos^2 2y + 2\cos 2y - \frac{3}{5} = 0$, которое имеет решения, так как $\cos 2y = -1 + \sqrt{\frac{8}{5}}$. Следовательно, этот случай также возможен, и мы получаем, что $\cos(x+3y) = \cos(\pi + 2\pi k) = -1$.

Итак, $\cos(x+3y)$ может быть равен $\frac{1}{5}$ или -1.

Заметим, что в обоих случаях все ограничения, появившиеся у нас в связи с ОДЗ ($\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$, $\cos y \neq 0$, $\sin y \neq 0$) выполняются.

Замечание. Поскольку в условии сказано, что у выражения $\cos(x+6y)$ существует не менее двух различных значений, то проверка возможности случаев не обязательна.

3. Есть 207 различных карточек с числами $1, 2, 3, 2^2, 3^2, \ldots, 2^{103}, 3^{103}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 6?

Ответ: 267 903.

Решение. Рассмотрим случай, когда на одной из выбранных карточек написана единица. Тогда на двух других карточках должны быть записаны чётные степени двоек и троек. Есть 51 способ выбрать чётную степень двойки и 51 способ выбрать чётную степень тройки, а так как этот выбор осуществляется независимо один от другого, то общее количество способов в этом случае равно $51^2 = 2601$.

Теперь перейдём к случаю, когда карточка с единицей не использована. Есть две возможности: взять две карточки со степенями тройки и одну со степенью двойки или наоборот.

Пусть мы берём две карточки со степенями двойки. Так как в произведении выбранных чисел двойка обязана присутствовать в чётной степени, степени двойки на взятых карточках должны иметь одинаковую чётность. Всего у нас есть 52 карточки с нечётными степенями и 51 карточка с чётными степенями. Значит, есть $C_{52}^2 = \frac{52\cdot 51}{2} = 1326$ способов выбрать карточки с нечётными степенями и $C_{51}^2 = \frac{51\cdot 50}{2} = 1275$ способов выбрать две карточки с чётными степенями – всего получаем 2601 способ. После того, как выбраны карточки со степенями двойки, мы можем выбрать любую карточку с чётной степенью тройки (51 способ). Так как выбор карточки со степенью тройки осуществляется независимо от предыдущего выбора, в совокупности выходит $2601 \cdot 51 = 132\,651$ способ.

Несложно видеть, что если мы возьмём две карточки со степенями тройки и одну со степенью двойки, то количество способов будет тем же самым, что и в предыдущем случае. Итак, получаем $2601 + 132\,651 \cdot 2 = 267\,903$ способов.

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 2 : 3$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = 8$, $PT = \frac{\sqrt{409}-5}{2}$, $S_{\triangle APC} = \frac{5760}{409}$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому

$OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = 2$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+4} = \frac{2}{3}$, $y = 8$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = 10^2 + \frac{9}{4} = \frac{409}{4}$. Следовательно, $PT = PO - OT = \frac{\sqrt{409}}{2} - \frac{5}{2}$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = \frac{3}{2} : \frac{\sqrt{409}}{2} = \frac{3}{\sqrt{409}}$, $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{20}{\sqrt{409}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{120}{409}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}PA \cdot PC \sin 2\beta = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12\cdot \frac{120}{409} = \frac{5760}{409}$.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1+27x^5\right) + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1+x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-2x^2+27x^4}\left(1+27x^5\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[5]{27}}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{27}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{2}{27}}\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Решение. Пусть $1 + x^2 = u$, $1 - 2x^2 + 27x^4 = v$, $1 + 27x^5 = w$. Тогда неравенство принимает вид $\log_u w + \log_v u - \log_v w - 1 \leqslant 0$. Далее его можно преобразовать так:

$$\log_u w + \frac{1}{\log_u v} - \frac{\log_u w}{\log_u v} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_u v \log_u w + 1 - \log_u w - \log_u v}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_u w - 1)(\log_u v - 1)}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_u w - \log_u u)(\log_u v - \log_u u)}{\log_u v} \leqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{(w-u)(v-u)}{(u-1)(v-1)} \leqslant 0. \qquad (2)$$

ОДЗ исходного неравенства задаётся условиями $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$, $u \neq 1$, $v \neq 1$. При этом последние два ограничения выполнены автоматически для любого решения (**??**), так как при $u = 1$ или $v = 1$ знаменатель дроби обращается в ноль. Помимо этого $u = 1 + x^2$ и $v = 1 - 2x^2 + 27x^4$ положительны при всех значениях x. Следовательно, единственное ограничение из ОДЗ, которое необходимо учесть, – это неравенство $1 + 27x^5 > 0$, откуда $x > -\frac{1}{\sqrt[5]{27}}$. Решаем неравенство (**??**):

$$\frac{\left(27x^5 + 1 - x^2 - 1\right)\left(1 - 2x^2 + 27x^4 - 1 - x^2\right)}{\left(1 + x^2 - 1\right)\left(1 - 2x^2 + 27x^4 - 1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3x^4\left(27x^3 - 1\right)\left(9x^2 - 1\right)}{x^4\left(27x^2 - 2\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(3x-1)\left(9x^2+3x+1\right)(3x+1)(3x-1)}{(27x^2-2)} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(3x+1)(3x-1)^2}{\left(x-\sqrt{\frac{2}{27}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{2}{27}}\right)} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{27}}; \sqrt{\frac{2}{27}}\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}. \end{cases}$$

С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[5]{27}}; -\frac{1}{3}\right] \cup \left(-\sqrt{\frac{2}{27}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{\frac{2}{27}}\right) \cup \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y \sin 2a - x \cos 2a), \\ x^2 + y^2 = 26(y \cos 3a - x \sin 3a) \end{cases}$$

существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 10.

Ответ: $a = \frac{\pi}{10} \pm \frac{2}{5} \operatorname{arctg} \frac{12}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выделяя полные квадраты, переписываем систему в виде

$$\begin{cases} (x + 13\cos 2a)^2 + (y - 13\sin 2a)^2 = 169, \\ (x + 13\sin 3a)^2 + (y - 13\cos 3a)^2 = 169. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений задаёт окружность радиуса 13; у первой из них центром является точка $A(-13\cos 2a; 13\sin 2a)$, а у второй – точка $B(-13\sin 3a; 13\cos 3a)$.

Если эти уравнения задают одну и ту же окружность, то на этой окружности найдутся точки на расстоянии 10 друг от друга. Окружности совпадают в случае, когда у них одинаковые центры. Получаем

$$\begin{cases} \cos 2a = \sin 3a, \\ \sin 2a = \cos 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3a\right) = 0, \\ \cos 3a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2a\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\pi + 10a}{4}\cos\frac{\pi + 2a}{4} = 0, \\ 2\cos\frac{\pi + 10a}{4}\cos\frac{\pi - 2a}{4} = 0. \end{cases}$$

Эти равенства выполняются, если либо $\cos\frac{\pi + 10a}{4} = 0$, либо $\cos\frac{\pi + 2a}{4} = \cos\frac{\pi - 2a}{4} = 0$. В первом случае получаем $a = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. Второй случай, очевидно, не даёт решений.

Пусть теперь рассматриваемые окружности различны и пересекаются в точках P и Q. Тогда четырёхугольник $APBQ$ – ромб. Известно, что в любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырёх сторон, откуда $AB^2 + PQ^2 = 4AP^2$. Так как мы хотим, чтобы точки P и Q располагались на расстоянии 10 друг от друга, $PQ = 10$, поэтому $AB^2 + 100 = 4 \cdot 169$, $AB = 24$. Итак, необходимо, чтобы расстояние между центрами окружностей A и B было равно 24. Отсюда

$$\sqrt{(-13\sin 3a + 13\cos 2a)^2 + (13\cos 3a - 13\sin 2a)^2} = 24 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 338 - 338\sin 3a\cos 2a - 338\sin 2a\cos 3a = 576 \Leftrightarrow 338\sin 5a = -238 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{(-1)^{k+1}}{5}\arcsin\frac{119}{169} + \frac{k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}.$$

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 – равносторонний. На ребре CC_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника ABA_1 и касается отрезка CC_1 в точке M.

а) Найдите длину ребра AB.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью ABA_1, а также длину ребра A_1C_1.

Ответ: а) $AB = \sqrt{15}$; б) $\angle(CC_1, ABA_1) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$, $A_1C_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Решение. а) Пусть O – центр сферы Ω, Q – центр треугольника ABA_1, A_1X – его медиана. Тогда O лежит на перпендикуляре ℓ к (ABA_1), проходящем через Q. С другой стороны, O

лежит в плоскости α, проходящей через M перпендикулярно CC_1 – то есть параллельно (ABC). Заметим, что Q лежит в α, поскольку $XQ : QA_1 = 1 : 2 = CM : MC_1$. Но Q лежит и на ℓ. Если бы плоскость (ABB_1A_1) была перпендикулярна плоскости (ABC), то все три боковых грани были бы перпендикулярны основанию, что невозможно в усечённой пирамиде. Значит, α и ℓ пересекаются ровно в одной точке – в точке Q. Итак, $Q = O$.

Значит, окружность, описанная около треугольника ABA_1, является большой окружностью на Ω, и её радиус равен $\sqrt{5}$. Отсюда $AB = R\sqrt{3} = \sqrt{15}$.

б) Пусть Y и Z – проекции точек A_1 и O на плоскость (ABC); тогда Z делит отрезок XY в отношении $XZ : ZY = 1 : 2$. Поскольку $CC_1 \perp (ABC)$, точка Y лежит на прямой AC.

Прямоугольные треугольники A_1YA и A_1YB равны по катету и гипотенузе, так что $YA = YB$. Значит, высота YX треугольника ABY равна $XA \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{15}{8}}$. Из прямоугольного треугольника A_1YX находим

$$\angle(CC_1, ABA_1) = \angle YA_1X = \arcsin \frac{YX}{A_1X} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{15}{8}} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{15}\right)\right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Кроме того, $YZ = \frac{2}{3}YX = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Пусть T – проекция Z на AC. Тогда $ZT = YZ \cos \angle YZT = YZ \cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и $YT = YZ \sin \angle YZT = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$. С другой стороны, поскольку $CZ = MO = \sqrt{5}$, имеем $CT = \sqrt{CZ^2 - ZT^2} = \sqrt{5 - \frac{5}{9}} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$. Отсюда $A_1C_1 = YC = CT - YT = \frac{2\sqrt{10}}{3} - \frac{5}{3\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Билет 14

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{34}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 + 1$ и $y = f(x) + 3$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x) - 1$.

   Ответ: $3\sqrt{2}$.

   Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 - 1 = ax + b$, а во втором случае – из уравнения $x^2 + 1 = ax + b + 3$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - (b+1) = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b+4}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b + 4}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+4)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+8)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases} (a^2+1)(a^2+4b+4) = 34, \\ (a^2+1)(a^2+4b+8) = 42, \end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 1$, $b = 3$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b + 1 = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b - 4} = 3$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2 - x_1|\sqrt{a^2+1} = 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

2. Известно, что $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x + 1)\sin 2y} = \dfrac{1}{5} + \cos^2(x - 2y)$ и $\dfrac{\cos 3x}{(1 - 2\cos 2x)\cos 2y} = \dfrac{4}{5} + \sin^2(x - 2y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x - 6y)$, если известно, что их не менее двух.

   Ответ: 1 или $-\frac{3}{5}$.

   Решение. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos 2x \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\
&= \cos 2x \cos x - (1 - \cos 2x)\cos x = (2\cos 2x - 1)\cos x, \\
\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = \\
&= 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos 2x = \sin x(1 + \cos 2x) + \sin x \cos 2x = (2\cos 2x + 1)\sin x.
\end{aligned}
$$

   С учётом этого данные в условии равенства принимают вид

$$
\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin 2y} = \frac{1}{5} + \cos^2(x - 2y), \\ -\frac{\cos x}{\cos 2y} = \frac{4}{5} + \sin^2(x - 2y) \end{cases} \qquad (3)
$$

   (необходимо также учесть, что $\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$). Складываем равенства (??) и получаем $\frac{\sin x}{\sin 2y} - \frac{\cos x}{\cos 2y} = 2$, откуда $\cos 2y \neq 0$, $\sin 2y \neq 0$ и $\cos x \sin 2y - \sin x \cos 2y = 2\sin 2y \cos 2y$. Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$
\sin(x - 2y) = \sin 4y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y = 4y + 2\pi k, \\ x - 2y = \pi - 4y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6y + 2\pi k, \\ x = \pi - 2y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.
$$

   Рассмотрим эти две возможности отдельно.

   Если $x = \pi - 2y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то система (??) принимает вид $\begin{cases} 1 = \frac{1}{5} + \cos^2 4y, \\ 1 = \frac{4}{5} + \sin^2 4y; \end{cases}$ отсюда $\cos^2 4y = \frac{4}{5}$, $\sin^2 4y = \frac{1}{5}$. Несложно видеть, что эта система имеет решения. При этом $\cos(x - 6y) = -\cos 8y = -2\cos^2 4y + 1 = -2 \cdot \frac{4}{5} + 1 = -\frac{3}{5}$.

   Если $x = 6y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то (??) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\sin 6y}{\sin 2y} = \frac{1}{5} + \cos^2 4y, \\ -\frac{\cos 6y}{\cos 2y} = \frac{4}{5} + \sin^2 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4\sin^2 2y = \frac{1}{5} + \cos^2 4y, \\ 3 - 4\cos^2 2y = \frac{4}{5} + \sin^2 4y. \end{cases}$$

Каждое из уравнений последней системы приводится к уравнению $\cos^2 4y - 2\cos 4y - \frac{4}{5} = 0$, которое имеет решения, так как $\cos 4y = 1 - \frac{3}{\sqrt{5}}$. Следовательно, этот случай также возможен, и мы получаем, что $\cos(x + 6y) = \cos(2\pi k) = 1$.

Итак, $\cos(x - 6y)$ может быть равен $-\frac{3}{5}$ или 1.

Заметим, что в обоих случаях все ограничения, появившиеся у нас в связи с ОДЗ ($\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$, $\cos 2y \neq 0$, $\sin 2y \neq 0$) выполняются.

Замечание. Поскольку в условии сказано, что у выражения $\cos(x - 6y)$ существует не менее двух различных значений, то проверка возможности случаев не обязательна.

3. Есть 183 различные карточки с числами $1,\ 2,\ 11,\ 2^2,\ 11^2, \ldots, 2^{91},\ 11^{91}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 22?

Ответ: 184 275.

Решение. Рассмотрим случай, когда на одной из выбранных карточек написана единица. Тогда на двух других карточках должны быть записаны чётные степени чисел два и одиннадцать. Есть 45 способов выбрать чётную степень двойки и 45 способов выбрать чётную степень числа одиннадцать, а так как этот выбор осуществляется независимо один от другого, то общее количество способов в этом случае равно $45^2 = 2025$.

Теперь перейдём к случаю, когда карточка с единицей не использована. Есть две возможности: взять две карточки со степенями двойки и одну со степенью числа одиннадцать или наоборот.

Пусть мы берём две карточки со степенями двойки. Так как в произведении выбранных чисел двойка обязана присутствовать в чётной степени, степени двойки на взятых карточках должны иметь одинаковую чётность. Всего у нас есть 46 карточек с нечётными степенями и 45 карточек с чётными степенями. Значит, есть $C_{46}^2 = \frac{46 \cdot 45}{2} = 1035$ способов выбрать карточки с нечётными степенями и $C_{45}^2 = \frac{45 \cdot 44}{2} = 990$ способов выбрать две карточки с чётными степенями – всего получаем 2025 способов. После того, как выбраны карточки со степенями двойки, мы можем выбрать любую карточку с чётной степенью числа одиннадцать (45 способов). Так как выбор карточки со степенью числа одиннадцать осуществляется независимо от предыдущего выбора, в совокупности выходит $2025 \cdot 45 = 91\,125$ способов.

Несложно видеть, что если мы возьмём две карточки со степенями числа одиннадцать и одну со степенью двойки, то количество способов будет тем же самым, что и в предыдущем случае. Итак, получаем $2025 + 91\,125 \cdot 2 = 184\,275$ способов.

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 3. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 3$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = \frac{3}{2}$, $PT = \sqrt{13} - \frac{5}{2}$, $S_{\triangle APC} = \frac{81}{26}$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому

$OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = \frac{3}{2}$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+3} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{3}{2}$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = 4$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = 3^2 + 2^2 = 13$. Следовательно, $PT = PO - OT = \sqrt{13} - \frac{5}{2}$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = 2 : \sqrt{13} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{12}{13}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}PA\cdot PC\sin 2\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{12}{13} = \frac{81}{26}$.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1-8x^5\right) + \log_{1-x^2+8x^4}\left(1+x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-x^2+8x^4}\left(1-8x^5\right)$.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[5]{8}}\right)$.

Решение. Пусть $1+x^2 = u$, $1-x^2+8x^4 = v$, $1-8x^5 = w$. Тогда неравенство принимает вид $\log_u w + \log_v u - \log_v w - 1 \leqslant 0$. Далее его можно преобразовать так:

$$\log_u w + \frac{1}{\log_u v} - \frac{\log_u w}{\log_u v} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_u v \log_u w + 1 - \log_u w - \log_u v}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\log_u w - 1)(\log_u v - 1)}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_u w - \log_u u)(\log_u v - \log_u u)}{\log_u v} \leqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{(w-u)(v-u)}{(u-1)(v-1)} \leqslant 0. \qquad (4)$$

ОДЗ исходного неравенства задаётся условиями $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$, $u \neq 1$, $v \neq 1$. При этом последние два ограничения выполнены автоматически для любого решения (**??**), так как при $u = 1$ или $v = 1$ знаменатель дроби обращается в ноль. Помимо этого $u = 1 + x^2$ и $v = 1 - x^2 + 8x^4$ положительны при всех значениях x. Следовательно, единственное ограничение из ОДЗ, которое необходимо учесть, – это неравенство $1 - 8x^5 > 0$, откуда $x < \frac{1}{\sqrt[5]{8}}$. Решаем неравенство (**??**):

$$\frac{\left(1-8x^5-x^2-1\right)\left(1-x^2+8x^4-1-x^2\right)}{\left(1+x^2-1\right)\left(1-x^2+8x^4-1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^4\left(-8x^3-1\right)\left(4x^2-1\right)}{x^4\left(8x^2-1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(2x+1)\left(4x^2-2x+1\right)(2x+1)(2x-1)}{\left(8x^2-1\right)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(2x-1)(2x+1)^2}{\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right). \end{cases}$$

С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[5]{8}}\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10(x\cos 4a + y\sin 4a), \\ x^2 + y^2 = 10(x\sin a + y\cos a) \end{cases}$$

существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 6.

Ответ: $a = \frac{\pi}{10} \pm \frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + \frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выделяя полные квадраты, переписываем систему в виде

$$\begin{cases} (x - 5\cos 4a)^2 + (y - 5\sin 4a)^2 = 25, \\ (x - 5\sin a)^2 + (y - 5\cos a)^2 = 25. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений задаёт окружность радиуса 5; у первой из них центром является точка $A(5\cos 4a; 5\sin 4a)$, а у второй – точка $B(5\sin a; 5\cos a)$.

Если эти уравнения задают одну и ту же окружность, то на этой окружности найдутся точки на расстоянии 6 друг от друга. Окружности совпадают в случае, когда у них одинаковые центры. Получаем

$$\begin{cases} \cos 4a = \sin a, \\ \sin 4a = \cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = 0, \\ \cos a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4a\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\pi+10a}{4}\cos\frac{\pi-6a}{4} = 0, \\ 2\cos\frac{\pi+10a}{4}\cos\frac{\pi+6a}{4} = 0. \end{cases}$$

Эти равенства выполняются, если либо $\cos\frac{\pi+10a}{4} = 0$, либо $\cos\frac{\pi-6a}{4} = \cos\frac{\pi+6a}{4} = 0$. В первом случае получаем $a = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$. Второй случай, очевидно, не даёт решений.

Пусть теперь рассматриваемые окружности различны и пересекаются в точках P и Q. Тогда четырёхугольник $APBQ$ – ромб. Известно, что в любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырёх сторон, откуда $AB^2 + PQ^2 = 4AP^2$. Так как мы хотим, чтобы точки P и Q располагались на расстоянии 6 друг от друга, $PQ = 6$, поэтому $AB^2 + 36 = 4 \cdot 25$, $AB = 8$. Итак, необходимо, чтобы расстояние между центрами окружностей A и B было равно 8. Отсюда

$$\sqrt{(5\sin a - 5\cos 4a)^2 + (5\cos a - 5\sin 4a)^2} = 8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 50 - 50\sin a\cos 4a - 50\sin 4a\cos a = 64 \Leftrightarrow 50\sin 5a = -14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{(-1)^{k+1}}{5}\arcsin\frac{7}{25} + \frac{k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}.$$

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник BB_1C – равносторонний. На ребре AA_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка N такая, что $AN : NA_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{5}$ проходит через вершины треугольника BB_1C и касается отрезка AA_1 в точке N.

а) Найдите длину ребра BB_1.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \arccos\sqrt{\frac{2}{5}}$. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BB_1C, а также длину ребра A_1B_1.

Ответ: а) $BB_1 = \sqrt{15}$; б) $\angle(AA_1, BB_1C) = \pi/4$, $A_1B_1 = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Решение. а) Пусть O – центр сферы Ω, Q – центр треугольника BCB_1, B_1X – его медиана. Тогда O лежит на перпендикуляре ℓ к (BCB_1), проходящем через Q. С другой стороны, O

лежит в плоскости α, проходящей через N перпендикулярно AA_1 – то есть параллельно (ABC). Заметим, что Q лежит в α, поскольку $XQ : QB_1 = 1 : 2 = AN : NA_1$. Но Q лежит и на ℓ. Если бы плоскость (BCC_1B_1) была перпендикулярна плоскости (ABC), то все три боковых грани были бы перпендикулярны основанию, что невозможно в усечённой пирамиде. Значит, α и ℓ пересекаются ровно в одной точке – в точке Q. Итак, $Q = O$.

Значит, окружность, описанная около треугольника BCB_1, является большой окружностью на Ω, и её радиус равен $\sqrt{5}$. Отсюда $BC = R\sqrt{3} = \sqrt{15}$.

б) Пусть Y и Z – проекции точек B_1 и O на плоскость (ABC); тогда Z делит отрезок XY в отношении $XZ : ZY = 1 : 2$. Поскольку $AA_1 \perp (ABC)$, точка Y лежит на прямой AB.

Прямоугольные треугольники B_1YB и B_1YC равны по катету и гипотенузе, так что $YC = YB$. Значит, высота YX треугольника CBY равна $XB\operatorname{tg}\angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{45}{8}}$. Из прямоугольного треугольника A_1YX находим

$$\angle(AA_1, BCB_1) = \angle YB_1X = \arcsin \frac{YX}{B_1X} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{45}{8}} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{15}\right)\right) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $\angle(AA_1, BCB_1) = \frac{\pi}{4}$. Кроме того, $YZ = \frac{2}{3}YX = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Пусть T – проекция Z на AB. Тогда $ZT = YZ\cos\angle YZT = YZ\cos\angle ABC = 1$ и $YT = YZ\sin\angle YZT = \sqrt{\frac{3}{2}}$. С другой стороны, поскольку $AZ = NO = \sqrt{5}$, имеем $AT = \sqrt{AZ^2 - ZT^2} = \sqrt{5-1} = 2$. Отсюда $A_1B_1 = AY = AT - YT = 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Билет 15

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2-2$ и $y=f(x)$ равно $\sqrt{26}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2$ и $y=f(x)+1$ равно $3\sqrt{2}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y=x^2$ и $y=f(x)$.

 Ответ: $\sqrt{10}$.

 Решение. Пусть $f(x)=ax+b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2-2=ax+b$, а во втором случае – из уравнения $x^2=ax+b+1$.

 Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2-ax-(b+2)=0$, откуда $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b+8}}{2}$, $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4b+8}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2-x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+8)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+4)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases}(a^2+1)(a^2+4b+8)=26,\\(a^2+1)(a^2+4b+4)=18,\end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2=1$, $b=1$.

 Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2-ax-b=0$, поэтому $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4b}=\sqrt{5}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2-x_1|\sqrt{a^2+1}=\sqrt{5}\sqrt{2}=\sqrt{10}$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x-1)\cos y}=\dfrac{2}{3}+\cos^2(x-y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x+1)\sin y}=-\dfrac{1}{3}-\sin^2(x-y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x-3y)$, если известно, что их не менее двух.

 Ответ: -1 или $-\frac{1}{3}$.

 Решение. Заметим, что

$$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\cos 2x\cos x-2\sin^2 x\cos x=$$
$$=\cos 2x\cos x-(1-\cos 2x)\cos x=(2\cos 2x-1)\cos x,$$
$$\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x=$$
$$=2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos 2x=\sin x(1+\cos 2x)+\sin x\cos 2x=(2\cos 2x+1)\sin x.$$

 С учётом этого данные в условии равенства принимают вид

$$\begin{cases}\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{2}{3}+\cos^2(x-y),\\ \frac{\sin x}{\sin y}=-\frac{1}{3}-\sin^2(x-y)\end{cases}\qquad(5)$$

 (необходимо также учесть, что $\cos 2x\neq\pm\frac{1}{2}$). Вычитаем из первого равенства (**??**) второе и получаем $\frac{\cos x}{\cos y}-\frac{\sin x}{\sin y}=2$, откуда $\cos y\neq 0$, $\sin y\neq 0$ и $\cos x\sin y-\sin x\cos y=2\sin y\cos y$. Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\sin(y-x)=\sin 2y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y-x=2y+2\pi k,\\ y-x=\pi-2y+2\pi k,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-y-2\pi k,\\ x=3y-\pi-2\pi k,k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

 Рассмотрим эти две возможности отдельно.

 Если $x=-y-2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то система (**??**) принимает вид $\begin{cases}1=\frac{2}{3}+\cos^2 2y,\\-1=-\frac{1}{3}-\sin^2 2y;\end{cases}$ отсюда $\sin^2 2y=\frac{2}{3}$, $\cos^2 2y=\frac{1}{3}$. Несложно видеть, что эта система имеет решения. При этом $\cos(x-3y)=\cos 4y=2\cos^2 2y-1=2\cdot\frac{1}{3}-1=-\frac{1}{3}$.

 Если $x=3y-\pi-2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то (**??**) принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{\cos 3y}{\cos y} = \frac{2}{3} + \cos^2 2y, \\ -\frac{\sin 3y}{\sin y} = -\frac{1}{3} - \sin^2 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4\cos^2 y = \frac{2}{3} + \cos^2 2y, \\ 4\sin^2 y - 3 = -\frac{1}{3} - \sin^2 2y. \end{cases}$$

Каждое из уравнений последней системы приводится к уравнению $\cos^2 2y + 2\cos 2y - \frac{1}{3} = 0$, которое имеет решения, так как $\cos 2y = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$. Следовательно, этот случай также возможен, и мы получаем, что $\cos(x - 3y) = \cos(-\pi - 2\pi k) = -1$.

Итак, $\cos(x - 3y)$ может быть равен $-\frac{2}{3}$ или -1.

Заметим, что в обоих случаях все ограничения, появившиеся у нас в связи с ОДЗ ($\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$, $\cos y \neq 0$, $\sin y \neq 0$) выполняются.

Замечание. Поскольку в условии сказано, что у выражения $\cos(x - 3y)$ существует не менее двух различных значений, то проверка возможности случаев не обязательна.

3. Есть 195 различных карточек с числами $1, 5, 7, 5^2, 7^2, \ldots, 5^{97}, 7^{97}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 35?

Ответ: 223 488.

Решение. Рассмотрим случай, когда на одной из выбранных карточек написана единица. Тогда на двух других карточках должны быть записаны чётные степени пятёрок и семёрок. Есть 48 способов выбрать чётную степень пятёрки и 48 способов выбрать чётную степень семёрки, а так как этот выбор осуществляется независимо один от другого, то общее количество способов в этом случае равно $48^2 = 2304$.

Теперь перейдём к случаю, когда карточка с единицей не использована. Есть две возможности: взять две карточки со степенями пятёрки и одну со степенью семёрки или наоборот.

Пусть мы берём две карточки со степенями семёрки. Так как в произведении выбранных чисел семёрка обязана присутствовать в чётной степени, степени семёрки на взятых карточках должны иметь одинаковую чётность. Всего у нас есть 49 карточек с нечётными степенями и 48 карточек с чётными степенями. Значит, есть $C_{49}^2 = \frac{49 \cdot 48}{2} = 1176$ способов выбрать карточки с нечётными степенями и $C_{48}^2 = \frac{48 \cdot 47}{2} = 1128$ способов выбрать две карточки с чётными степенями – всего получаем 2304 способов. После того, как выбраны карточки со степенями семёрки, мы можем выбрать любую карточку с чётной степенью пятёрки (48 способов). Так как выбор карточки со степенью пятёрки осуществляется независимо от предыдущего выбора, в совокупности выходит $2304 \cdot 48 = 110\,592$ способов.

Несложно видеть, что если мы возьмём две карточки со степенями пятёрки и одну со степенью семёрки, то количество способов будет тем же самым, что и в предыдущем случае. Итак, получаем $2304 + 110\,592 \cdot 2 = 223\,488$ способов.

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 5. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 2$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 6,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = 5$, $PT = \frac{3\sqrt{41} - 13}{2}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1000}{41}$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому

$OH=ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN=PH$, $\angle OPN=\angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN=HD=\frac{5}{2}$; отсюда следует, что $AP=DP$. Пусть $AP=DP=y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC}=\frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+5}=\frac{1}{2}$, $y=5$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP=DP$, $\angle APO=\angle DPO$), поэтому $\angle AOP=\angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2=OD^2-DH^2=\frac{169}{4}-\frac{25}{4}=36$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2=PH^2+OH^2=\left(\frac{15}{2}\right)^2+36=\frac{369}{4}$. Следовательно, $PT=PO-OT=\frac{3\sqrt{41}}{2}-\frac{13}{2}$.

Пусть $\angle CPO=\beta$. Тогда $\sin\beta=\frac{OH}{OP}=6:\frac{3\sqrt{41}}{2}=\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{5}{\sqrt{41}}$, $\sin 2\beta=2\cos\beta\sin\beta=\frac{40}{41}$, $S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}PA\cdot PC\sin 2\beta=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10\cdot\frac{40}{41}=\frac{1000}{41}$.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1+8x^5\right)+\log_{1-3x^2+16x^4}\left(1+x^2\right)\leqslant 1+\log_{1-3x^2+16x^4}\left(1+8x^5\right)$.

Ответ: $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[5]{8}};-\frac{1}{2}\right]\bigcup\left(-\frac{\sqrt{3}}{4};0\right)\bigcup\left(0;\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\bigcup\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Решение. Пусть $1+x^2=u$, $1-3x^2+16x^4=v$, $1+8x^5=w$. Тогда неравенство принимает вид $\log_u w+\log_v u-\log_v w-1\leqslant 0$. Далее его можно преобразовать так:

$$\log_u w+\frac{1}{\log_u v}-\frac{\log_u w}{\log_u v}-1\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{\log_u v\log_u w+1-\log_u w-\log_u v}{\log_u v}\leqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{\left(\log_u w-1\right)\left(\log_u v-1\right)}{\log_u v}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{\left(\log_u w-\log_u u\right)\left(\log_u v-\log_u u\right)}{\log_u v}\leqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b-\log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c=1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{(w-u)(v-u)}{(u-1)(v-1)}\leqslant 0. \qquad (6)$$

ОДЗ исходного неравенства задаётся условиями $u>0$, $v>0$, $w>0$, $u\neq 1$, $v\neq 1$. При этом последние два ограничения выполнены автоматически для любого решения (**??**), так как при $u=1$ или $v=1$ знаменатель дроби обращается в ноль. Помимо этого $u=1+x^2$ и $v=1-3x^2+16x^4$ положительны при всех значениях x. Следовательно, единственное ограничение из ОДЗ, которое необходимо учесть, – это неравенство $1+8x^5>0$, откуда $x>-\frac{1}{\sqrt[5]{8}}$. Решаем неравенство (**??**):

$$\frac{\left(8x^5+1-x^2-1\right)\left(1-3x^2+16x^4-1-x^2\right)}{\left(1+x^2-1\right)\left(1-3x^2+16x^4-1\right)}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{4x^4\left(8x^3-1\right)\left(4x^2-1\right)}{x^4\left(16x^2-3\right)}\leqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ \frac{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)(2x+1)(2x-1)}{\left(16x^2-3\right)}\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ \frac{(2x+1)(2x-1)^2}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\bigcup\left(-\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\bigcup\left\{\frac{1}{2}\right\}.\end{cases}$$

С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[5]{8}}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y\sin a - x\cos a), \\ x^2 + y^2 = 26(y\cos 2a - x\sin 2a) \end{cases}$$

существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 24.

Ответ: $a = \frac{\pi}{6} \pm \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5}{12} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выделяя полные квадраты, переписываем систему в виде

$$\begin{cases} (x + 13\cos a)^2 + (y - 13\sin a)^2 = 169, \\ (x + 13\sin 2a)^2 + (y - 13\cos 2a)^2 = 169. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений задаёт окружность радиуса 13; у первой из них центром является точка $A(-13\cos a; 13\sin a)$, а у второй – точка $B(-13\sin 2a; 13\cos 2a)$.

Если эти уравнения задают одну и ту же окружность, то на этой окружности найдутся точки на расстоянии 24 друг от друга. Окружности совпадают в случае, когда у них одинаковые центры. Получаем

$$\begin{cases} \cos a = \sin 2a, \\ \sin 2a = \cos a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2a\right) = 0, \\ \cos 2a + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{\pi+6a}{4}\cos\frac{\pi+2a}{4} = 0, \\ 2\cos\frac{\pi+6a}{4}\cos\frac{\pi-2a}{4} = 0. \end{cases}$$

Эти равенства выполняются, если либо $\cos\frac{\pi+6a}{4} = 0$, либо $\cos\frac{\pi+2a}{4} = \cos\frac{\pi-2a}{4} = 0$. В первом случае получаем $a = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Второй случай, очевидно, не даёт решений.

Пусть теперь рассматриваемые окружности различны и пересекаются в точках P и Q. Тогда четырёхугольник $APBQ$ – ромб. Известно, что в любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырёх сторон, откуда $AB^2 + PQ^2 = 4AP^2$. Так как мы хотим, чтобы точки P и Q располагались на расстоянии 24 друг от друга, $PQ = 24$, поэтому $AB^2 + 576 = 4 \cdot 169$, $AB = 10$. Итак, необходимо, чтобы расстояние между центрами окружностей A и B было равно 10. Отсюда

$$\sqrt{(-13\sin 2a + 13\cos a)^2 + (13\cos 2a - 13\sin a)^2} = 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 338 - 338\sin 2a\cos a - 338\sin a\cos 2a = 100 \Leftrightarrow 338\sin 3a = 238 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{(-1)^k}{3}\arcsin\frac{119}{169} + \frac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC \parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник ABA_1 – равносторонний. На ребре CC_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка M такая, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{7}$ проходит через вершины треугольника AA_1B и касается отрезка CC_1 в точке M.

а) Найдите длину ребра AB.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle BAC = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите угол между прямой C_1C и плоскостью AA_1B, а также длину ребра A_1C_1.

Ответ: а) $AB = \sqrt{21}$; б) $\angle(C_1C, AA_1B) = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$, $A_1C_1 = \frac{7-2\sqrt{7}}{3}$.

Решение. а) Пусть O – центр сферы Ω, Q – центр треугольника ABA_1, A_1X – его медиана. Тогда O лежит на перпендикуляре ℓ к (ABA_1), проходящем через Q. С другой стороны, O

лежит в плоскости α, проходящей через M перпендикулярно CC_1 – то есть параллельно (ABC). Заметим, что Q лежит в α, поскольку $XQ : QA_1 = 1 : 2 = CM : MC_1$. Но Q лежит и на ℓ. Если бы плоскость (ABB_1A_1) была перпендикулярна плоскости (ABC), то все три боковых грани были бы перпендикулярны основанию, что невозможно в усечённой пирамиде. Значит, α и ℓ пересекаются ровно в одной точке – в точке Q. Итак, $Q = O$.

Значит, окружность, описанная около треугольника ABA_1, является большой окружностью на Ω, и её радиус равен $\sqrt{7}$. Отсюда $AB = R\sqrt{3} = \sqrt{21}$.

б) Пусть Y и Z – проекции точек A_1 и O на плоскость (ABC); тогда Z делит отрезок XY в отношении $XZ : ZY = 1 : 2$. Поскольку $CC_1 \perp (ABC)$, точка Y лежит на прямой AC.

Прямоугольные треугольники A_1YA и A_1YB равны по катету и гипотенузе, так что $YA = YB$. Значит, высота YX треугольника ABY равна $XA \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{21}{2}}$. Из прямоугольного треугольника A_1YX находим

$$\angle(CC_1, ABA_1) = \angle YA_1X = \arcsin \frac{YX}{A_1X} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{21}{2}} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{21}\right)\right) = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Кроме того, $YZ = \frac{2}{3}YX = \sqrt{\frac{14}{3}}$.

Пусть T – проекция Z на AC. Тогда $ZT = YZ\cos\angle YZT = YZ\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{14}}{3}$ и $YT = YZ\sin\angle YZT = \frac{2\sqrt{7}}{3}$. С другой стороны, поскольку $CZ = MO = \sqrt{7}$, имеем $CT = \sqrt{CZ^2 - ZT^2} = \sqrt{7 - \frac{14}{9}} = \frac{7}{3}$. Отсюда $A_1C_1 = YC = CT - YT = \frac{7}{3} - \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Билет 16

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2+2$ и $y=f(x)$ равно $\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y=x^2-1$ и $y=f(x)+1$ равно $\sqrt{42}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y=x^2$ и $y=f(x)+1$.

   Ответ: $\sqrt{34}$.

   Решение. Пусть $f(x)=ax+b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2+2=ax+b$, а во втором случае – из уравнения $x^2-1=ax+b+1$.

   Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2-ax-(b-2)=0$, откуда $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b-8}}{2}$, $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4b-8}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2-x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b-8)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b-8)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases}(a^2+1)(a^2+4b-8)=10,\\(a^2+1)(a^2+4b+8)=42,\end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2=1$, $b=3$.

   Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2-ax-b-1=0$, поэтому $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4b+4}=\sqrt{17}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2-x_1|\sqrt{a^2+1}=\sqrt{17}\sqrt{2}=\sqrt{34}$.

2. Известно, что $\dfrac{\cos 3x}{(2\cos 2x-1)\cos 2y}=\dfrac{1}{6}+\sin^2(x+2y)$ и $\dfrac{\sin 3x}{(2\cos 2x+1)\sin 2y}=\dfrac{5}{6}+\cos^2(x+2y)$. Найдите все возможные значения выражения $\cos(x+6y)$, если известно, что их не менее двух.

   Ответ: -1 или $-\frac{2}{3}$.

   Решение. Заметим, что

$$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\cos 2x\cos x-2\sin^2 x\cos x=$$
$$=\cos 2x\cos x-(1-\cos 2x)\cos x=(2\cos 2x-1)\cos x,$$
$$\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x=$$
$$=2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos 2x=\sin x(1+\cos 2x)+\sin x\cos 2x=(2\cos 2x+1)\sin x.$$

   С учётом этого данные в условии равенства принимают вид

$$\begin{cases}\frac{\cos x}{\cos 2y}=\frac{1}{6}+\sin^2(x+2y),\\ \frac{\sin x}{\sin 2y}=\frac{5}{6}+\cos^2(x+2y)\end{cases}\tag{7}$$

   (необходимо также учесть, что $\cos 2x\neq\pm\frac{1}{2}$). Складываем равенства (**??**) и получаем $\frac{\cos x}{\cos 2y}+\frac{\sin x}{\sin 2y}=2$, откуда $\cos 2y\neq 0$, $\sin 2y\neq 0$ и $\cos x\sin 2y+\sin x\cos 2y=2\sin 2y\cos 2y$. Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\sin(x+2y)=\sin 4y\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2y=4y+2\pi k,\\x+2y=\pi-4y+2\pi k,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2y+2\pi k,\\x=\pi-6y+2\pi k,k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

   Рассмотрим эти две возможности отдельно.

   Если $x=2y+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то система (**??**) принимает вид $\begin{cases}1=\frac{1}{6}+\sin^2 4y,\\1=\frac{5}{6}+\cos^2 4y;\end{cases}$ отсюда $\sin^2 4y=\frac{5}{6}$, $\cos^2 4y=\frac{1}{6}$. Несложно видеть, что эта система имеет решения. При этом $\cos(x+6y)=\cos 8y=2\cos^2 4y-1=2\cdot\frac{1}{6}-1=-\frac{2}{3}$.

   Если $x=\pi-6y+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, то (**??**) принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{\cos 6y}{\cos 2y} = \frac{1}{6} + \sin^2 4y, \\ \frac{\sin 6y}{\sin 2y} = \frac{5}{6} + \cos^2 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4\cos^2 2y = \frac{1}{6} + \sin^2 4y, \\ 3 - 4\sin^2 2y = \frac{5}{6} + \cos^2 4y. \end{cases}$$

Каждое из уравнений последней системы приводится к уравнению $\cos^2 4y - 2\cos 4y - \frac{1}{6} = 0$, которое имеет решения, так как $\cos 4y = 1 - \sqrt{\frac{7}{6}}$. Следовательно, этот случай также возможен, и мы получаем, что $\cos(x+6y) = \cos(\pi + 2\pi k) = -1$.

Итак, $\cos(x+6y)$ может быть равен $-\frac{2}{3}$ или -1.

Заметим, что в обоих случаях все ограничения, появившиеся у нас в связи с ОДЗ ($\cos 2x \neq \pm\frac{1}{2}$, $\cos 2y \neq 0$, $\sin 2y \neq 0$) выполняются.

Замечание. Поскольку в условии сказано, что у выражения $\cos(x+6y)$ существует не менее двух различных значений, то проверка возможности случаев не обязательна.

3. Есть 167 различных карточек с числами $1, 3, 11, 3^2, 11^2, \ldots, 3^{83}, 11^{83}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 33?

Ответ: 139 523.

Решение. Рассмотрим случай, когда на одной из выбранных карточек написана единица. Тогда на двух других карточках должны быть записаны чётные степени чисел три и одиннадцать. Есть 41 способ выбрать чётную степень тройки и 41 способ выбрать чётную степень числа одиннадцать, а так как этот выбор осуществляется независимо один от другого, то общее количество способов в этом случае равно $41^2 = 1681$.

Теперь перейдём к случаю, когда карточка с единицей не использована. Есть две возможности: взять две карточки со степенями тройки и одну со степенью числа одиннадцать или наоборот.

Пусть мы берём две карточки со степенями тройки. Так как в произведении выбранных чисел тройка обязана присутствовать в чётной степени, степени тройки на взятых карточках должны иметь одинаковую чётность. Всего у нас есть 42 карточки с нечётными степенями и 41 карточка с чётными степенями. Значит, есть $C_{42}^2 = \frac{42\cdot 41}{2} = 861$ способ выбрать карточки с нечётными степенями и $C_{41}^2 = \frac{41\cdot 40}{2} = 820$ способов выбрать две карточки с чётными степенями – всего получаем 1681 способ. После того, как выбраны карточки со степенями тройки, мы можем выбрать любую карточку с чётной степенью числа одиннадцать (41 способ). Так как выбор карточки со степенью числа одиннадцать осуществляется независимо от предыдущего выбора, в совокупности выходит $1681 \cdot 41 = 68\,921$ способ.

Несложно видеть, что если мы возьмём две карточки со степенями числа одиннадцать и одну со степенью тройки, то количество способов будет тем же самым, что и в предыдущем случае. Итак, получаем $1681 + 68\,921 \cdot 2 = 139\,523$ способов.

4. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 8. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 5$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = 2$, $PT = 3\sqrt{5} - 5$, $S_{\triangle APC} = 8$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому

$OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = 4$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+8} = \frac{1}{5}$, $y = 2$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = 25 - 16 = 9$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = 6^2 + 9 = 45$. Следовательно, $PT = PO - OT = 3\sqrt{5} - 5$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = 3 : \sqrt{45} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{4}{5}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}PA \cdot PC \sin 2\beta = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10\cdot\frac{4}{5} = 8$.

5. Решите неравенство $\log_{1+x^2}\left(1-27x^5\right) + \log_{1-3x^2+36x^4}\left(1+x^2\right) \leqslant 1 + \log_{1-3x^2+36x^4}\left(1-27x^5\right)$.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{1}{3}\right\} \bigcup \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; 0\right) \bigcup \left(0; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \bigcup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[5]{27}}\right)$.

Решение. Пусть $1 + x^2 = u$, $1 - 3x^2 + 36x^4 = v$, $1 - 27x^5 = w$. Тогда неравенство принимает вид $\log_u w + \log_v u - \log_v w - 1 \leqslant 0$. Далее его можно преобразовать так:

$$\log_u w + \frac{1}{\log_u v} - \frac{\log_u w}{\log_u v} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_u v \log_u w + 1 - \log_u w - \log_u v}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_u w - 1)(\log_u v - 1)}{\log_u v} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_u w - \log_u u)(\log_u v - \log_u u)}{\log_u v} \leqslant 0.$$

Для решения этого неравенства далее применяем метод рационализации: знак разности $\log_a b - \log_a c$ на области допустимых значений совпадает со знаком выражения $\frac{b-c}{a-1}$; в частности (при $c = 1$), знак логарифма $\log_a b$ совпадает со знаком выражения $\frac{b-1}{a-1}$. Тогда из последнего неравенства получаем

$$\frac{(w-u)(v-u)}{(u-1)(v-1)} \leqslant 0. \tag{8}$$

ОДЗ исходного неравенства задаётся условиями $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$, $u \neq 1$, $v \neq 1$. При этом последние два ограничения выполнены автоматически для любого решения (**??**), так как при $u = 1$ или $v = 1$ знаменатель дроби обращается в ноль. Помимо этого $u = 1 + x^2$ и $v = 1 - 3x^2 + 36x^4$ положительны при всех значениях x. Следовательно, единственное ограничение из ОДЗ, которое необходимо учесть, – это неравенство $1 - 27x^5 > 0$, откуда $x < \frac{1}{\sqrt[5]{27}}$. Решаем неравенство (**??**):

$$\frac{\left(1-27x^5-x^2-1\right)\left(1-3x^2+36x^4-1-x^2\right)}{\left(1+x^2-1\right)\left(1-3x^2+36x^4-1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4x^4\left(-27x^3-1\right)\left(9x^2-1\right)}{3x^4\left(12x^2-1\right)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(3x+1)\left(9x^2-3x+1\right)(3x+1)(3x-1)}{(12x^2-1)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \frac{(3x-1)(3x+1)^2}{\left(x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \in \left\{-\frac{1}{3}\right\} \bigcup \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \bigcup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right). \end{cases}$$

С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in \left\{-\frac{1}{3}\right\} \bigcup \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; 0\right) \bigcup \left(0; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \bigcup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt[5]{27}}\right)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=10(x\cos a+y\sin a),\\ x^2+y^2=10(x\sin 3a+y\cos 3a)\end{cases}$$

существуют два решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1;y_1)$ и $Q(x_2;y_2)$ равно 8.

Ответ: $a=\frac{\pi}{8}\pm\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Выделяя полные квадраты, переписываем систему в виде

$$\begin{cases} (x-5\cos a)^2+(y-5\sin a)^2=25,\\ (x-5\sin 3a)^2+(y-5\cos 3a)^2=25.\end{cases}$$

Каждое из этих уравнений задаёт окружность радиуса 5; у первой из них центром является точка $A(5\cos a;5\sin a)$, а у второй – точка $B(5\sin 3a;5\cos 3a)$.

Если эти уравнения задают одну и ту же окружность, то на этой окружности найдутся точки на расстоянии 8 друг от друга. Окружности совпадают в случае, когда у них одинаковые центры. Получаем

$$\begin{cases} \cos a=\sin 3a,\\ \sin 3a=\cos a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \cos a+\cos\left(\frac{\pi}{2}+3a\right)=0,\\ \cos 3a+\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2\cos\frac{\pi+8a}{4}\cos\frac{\pi+4a}{4}=0,\\ 2\cos\frac{\pi+8a}{4}\cos\frac{\pi-4a}{4}=0.\end{cases}$$

Эти равенства выполняются, если либо $\cos\frac{\pi+8a}{4}=0$, либо $\cos\frac{\pi-4a}{4}=\cos\frac{\pi+4a}{4}=0$. В первом случае получаем $a=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Второй случай, очевидно, не даёт решений.

Пусть теперь рассматриваемые окружности различны и пересекаются в точках P и Q. Тогда четырёхугольник $APBQ$ – ромб. Известно, что в любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех четырёх сторон, откуда $AB^2+PQ^2=4AP^2$. Так как мы хотим, чтобы точки P и Q располагались на расстоянии 8 друг от друга, $PQ=8$, поэтому $AB^2+64=4\cdot 25$, $AB=6$. Итак, необходимо, чтобы расстояние между центрами окружностей A и B было равно 6. Отсюда

$$\sqrt{(5\sin 3a-5\cos a)^2+(5\cos 3a-5\sin a)^2}=6\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 50-50\sin a\cos 3a-50\sin 3a\cos a=36\Leftrightarrow 50\sin 4a=14\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{(-1)^k}{4}\arcsin\frac{7}{25}+\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}.$$

7. Дана усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 ($ABC\parallel A_1B_1C_1$), такая, что треугольник BB_1C – равносторонний. На ребре AA_1, перпендикулярном основанию ABC пирамиды, лежит точка N такая, что $AN:NA_1=1:2$. Сфера Ω с радиусом $\sqrt{7}$ проходит через вершины треугольника BB_1C и касается отрезка AA_1 в точке N.

а) Найдите длину ребра BB_1.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью BB_1C, а также длину ребра A_1B_1.

Ответ: а) $BB_1=\sqrt{21}$; б) $\angle(AA_1,BB_1C)=\pi/6$, $A_1B_1=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. а) Пусть O – центр сферы Ω, Q – центр треугольника BCB_1, B_1X – его медиана. Тогда O лежит на перпендикуляре ℓ к (BCB_1), проходящем через Q. С другой стороны, O лежит в плоскости α, проходящей через N перпендикулярно AA_1 – то есть параллельно (ABC). Заметим, что Q лежит в α, поскольку $XQ:QB_1=1:2=AN:NA_1$. Но Q лежит и на ℓ. Если бы плоскость (BCC_1B_1) была перпендикулярна плоскости (ABC), то все три боковых грани были бы перпендикулярны основанию, что невозможно в усечённой пирамиде. Значит, α и ℓ пересекаются ровно в одной точке – в точке Q. Итак, $Q = O$.

Значит, окружность, описанная около треугольника BCB_1, является большой окружностью на Ω, и её радиус равен $\sqrt{7}$. Отсюда $BC = R\sqrt{3} = \sqrt{21}$.

б) Пусть Y и Z – проекции точек B_1 и O на плоскость (ABC); тогда Z делит отрезок XY в отношении $XZ : ZY = 1 : 2$. Поскольку $AA_1 \perp (ABC)$, точка Y лежит на прямой AB.

Прямоугольные треугольники B_1YB и B_1YC равны по катету и гипотенузе, так что $YC = YB$. Значит, высота YX треугольника CBY равна $XB \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{\sqrt{21}}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$. Из прямоугольного треугольника A_1YX находим

$$\angle(AA_1, BCB_1) = \angle YB_1X = \arcsin \frac{YX}{B_1X} = \arcsin \left(\frac{3\sqrt{7}}{4} : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{21} \right) \right) = \arcsin \frac{1}{2},$$

откуда $\angle(AA_1, BCB_1) = \frac{\pi}{6}$. Кроме того, $YZ = \frac{2}{3} YX = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Пусть T – проекция Z на AB. Тогда $ZT = YZ \cos \angle YZT = YZ \cos \angle ABC = 1$ и $YT = YZ \sin \angle YZT = \frac{\sqrt{3}}{2}$. С другой стороны, поскольку $AZ = NO = \sqrt{7}$, имеем $AT = \sqrt{AZ^2 - ZT^2} = \sqrt{7-1} = \sqrt{6}$. Отсюда $A_1B_1 = AY = AT - YT = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(4 балла)** Выведена формула для расстояния между точками пересечения прямой и параболы 1 балл;

   получена система уравнений относительно неизвестных коэффициентов .... 1 балл;

   найдены неизвестные коэффициенты .... 1 балл;

   при решении системы потеряно одно из значений углового коэффициента прямой снять 1 балл;

   вместо расстояния между точками рассматривается расстояние между проекциями точек на ось абсцисс .... 0 баллов за задачу.

2. **(6 баллов)** Сокращены дроби в левых частях равенств .... 1 балл;

   получено равенство синусов (как в решении) .... 2 балла;

   разобран случай, приводящий к ответу 1 или -1 .... 1 балл;

   разобран другой случай .... 2 балла.

   Внимание! В решении **НЕ** требуется доказывать, что случаи реализуются. За отсутствие доказательства баллы не снимаются.

3. **(5 баллов)** Найдено количество способов, когда на одной из карточек единица ...... 2 балла;

   найдено количество способов, когда карточка с единицей не используется .... 3 балла;

   неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев, учтены не все случаи или некоторые наборы учтены более одного раза .... не более 3 баллов за задачу;

   если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 6 раз больше указанного в решении) .... баллы не снимаются;

   ответ не приведён к числовому .... баллы не снимать;

   если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт, например, вместо $\frac{n(n+1)}{2}$ берётся $n(n+1)$ .... 0 баллов за рассматриваемый случай;

   наличие единицы не считается особым случаем (вследствие чего наборы с 1 учтены дважды), и при этом всё остальное посчитано верно .... 3 балла за задачу.

4. **(6 баллов)** а) (2 балла) Доказано, что треугольник BCP равнобедренный и что PL – биссектриса угла APC .... 1 балл;

   б) (4 балла) найден отрезок PT .... 2 балла;

   найдена площадь треугольника ACP .... 2 балла.

5. **(6 баллов)** Нахождение ОДЗ отдельно не оценивается.

   За любое неэквивалентное на ОДЗ преобразование[1] .... 0 баллов за задачу;

[1]Под неэквивалентным преобразованием понимается любое недопустимое действие с неравенством (ниже приведены примеры таких действий):

неравенство преобразовано к виду $\frac{(\log_u w-1)(\log_u v-1)}{\log_u v} \leqslant 0$ или к виду $(\log_u w - 1)(1 - \log_v u) \leqslant 0$ 2 балла;

неравенство сведено к рациональному или системе рациональных неравенств ....1 балл;

ответ отличается от верного конечным количеством точек ....снять по 1 баллу за каждую лишнюю/недостающую точку, но не более трёх баллов;

ответ отличается от верного более чем на конечное число точек .. не более 3 баллов за задачу.

6. **(6 баллов)** Получены уравнения обеих окружностей ....1 балл;

составлено тригонометрическое уравнение в случае совпадения окружностей ....1 балл;

решено тригонометрическое уравнение в случае совпадения окружностей ....1 балл;

составлено тригонометрическое уравнение в случае пересечения окружностей ....1 балл;

решено тригонометрическое уравнение в случае пересечения окружностей ....2 балла.

7. **(7 баллов)** Доказано, что центр сферы является центром равностороннего треугольника из условия ....2 балла;

найдена длина ребра из пункта а) ....1 балл;

за каждый из вопросов пункта б) ....по 2 балла.

– умножение обеих частей на выражение неизвестного знака,
– неверные формулы при работе с логарифмами (сумма логарифмов – это логарифм суммы и пр.),
– переход $\log_a b \leqslant \log_c b \Leftrightarrow a \leqslant c$ или $\log_a b \geqslant \log_c b \Leftrightarrow a \leqslant c$,
– переход $\log_a b \leqslant \log_c b \Leftrightarrow a \leqslant b$,
– если осуществляется переход от логарифмического неравенства к рациональному, и при этом не учитывается, что основания логарифмов переменные (т.е. нет ни метода рационализации, ни рассмотрения случаев, когда основание логарифма больше/меньше 1: например, выполнен переход от неравенства $\log_x(f(x)) < \log_x(g(x))$ к неравенству $f(x) < g(x)$).