

## 11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

## 11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x - 6|)^2 + (|y - 8|)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 10$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

## 11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

## 11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$ .
- [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 9 и 16.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 16$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
- [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

## 11 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [3 балла] Монету подбрасывают 90 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть  $p$  – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а  $q$  – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите  $p - q$ .
- [5 баллов] Решите уравнение  $\frac{\cos 8x}{\cos 3x + \sin 3x} + \frac{\sin 8x}{\cos 3x - \sin 3x} = \sqrt{2}$ .
- [5 баллов] Решите неравенство  $27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48$ .
- [5 баллов] а) Сфера с центром  $O$  касается боковых рёбер  $SA, SB, SC$  пирамиды  $SABC$  в точках  $K, L, M$  соответственно, а также касается её основания  $ABC$ . Через точку сферы, ближайшую к точке  $S$ , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды  $SABC$  этой плоскостью равна 5,  $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{21}}{5}$ . Найдите площадь треугольника  $KLM$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $SO = 36$ , а плоскости  $KLM$  и  $ABC$  параллельны. Найдите объём пирамиды  $SABC$ .
- [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} y = |x - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 2, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

- [5 баллов] а) Две параллельные прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  касаются окружности  $\omega_1$  с центром  $O_1$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Окружность  $\omega_2$  с центром  $O_2$  касается прямой  $\ell_1$  в точке  $D$ , пересекает прямую  $\ell_2$  в точках  $V$  и  $E$ , а также вторично пересекает окружность  $\omega_1$  в точке  $C$  (при этом точка  $O_2$  лежит между прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$ ). Известно, что отношение площади четырёхугольника  $BO_1CO_2$  к площади треугольника  $O_2VE$  равно 2. Найдите отношение радиусов окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_1$ .  
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что  $BD = 2$ .
- [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 90 + x - 6^{90}, \\ y \leq \log_6 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

## 11 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [3 балла] Монету подбрасывают 70 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть  $p$  – вероятность того, что орёл выпадет больше 42 раз, а  $q$  – вероятность того, что орёл выпадет не больше 28 раз. Найдите  $p - q$ .
- [5 баллов] Решите уравнение  $\frac{\cos 4x}{\cos 3x - \sin 3x} + \frac{\sin 4x}{\cos 3x + \sin 3x} = \sqrt{2}$ .
- [5 баллов] Решите неравенство  $8\sqrt{\log_2 x} - 7 \cdot 2^{1 + \sqrt{4 \log_2 x}} + 60 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 72$ .
- [5 баллов] а) Сфера с центром  $O$  касается боковых рёбер  $SA, SB, SC$  пирамиды  $SABC$  в точках  $K, L, M$  соответственно, а также касается её основания  $ABC$ . Через точку сферы, ближайшую к точке  $S$ , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды  $SABC$  этой плоскостью равна 2, а  $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{7}}{4}$ . Найдите площадь треугольника  $KLM$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $SO = 9$ , а плоскости  $KLM$  и  $ABC$  параллельны. Найдите объём пирамиды  $SABC$ .
- [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x = |y - \sqrt{a}| + \sqrt{a} - 4, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

- [5 баллов] а) Две параллельные прямые  $l_1$  и  $l_2$  касаются окружности  $\omega_1$  с центром  $O_1$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Окружность  $\omega_2$  с центром  $O_2$  касается прямой  $l_1$  в точке  $D$ , пересекает прямую  $l_2$  в точках  $B$  и  $E$ , а также вторично пересекает окружность  $\omega_1$  в точке  $C$  (при этом точка  $O_2$  лежит между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ ). Известно, что отношение площади четырёхугольника  $BO_1CO_2$  к площади треугольника  $O_2BE$  равно 3. Найдите отношение радиусов окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_1$ .  
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что  $BD = 3$ .
- [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 80 + x - 7^{80}, \\ y \leq \log_7 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

## 11 класс

ВАРИАНТ 15

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [3 балла] Монету подбрасывают 110 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть  $p$  – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 61 раза, а  $q$  – вероятность того, что орёл выпадет меньше 49 раз. Найдите  $p - q$ .
- [5 баллов] Решите уравнение  $\frac{\cos 14x}{\cos 5x - \sin 5x} - \frac{\sin 14x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$ .
- [5 баллов] Решите неравенство  $27\sqrt{\log_3 x} - 13 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 55 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 75$ .
- [5 баллов] а) Сфера с центром  $O$  касается боковых рёбер  $SA, SB, SC$  пирамиды  $SABC$  в точках  $K, L, M$  соответственно, а также касается её основания  $ABC$ . Через точку сферы, ближайшую к точке  $S$ , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды  $SABC$  этой плоскостью равна 9, а  $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{35}}{6}$ . Найдите площадь треугольника  $KLM$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $SO = 25$ , а плоскости  $KLM$  и  $ABC$  параллельны. Найдите объём пирамиды  $SABC$ .
- [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} y = -|x - \sqrt{a}| + 2 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

- [5 баллов] а) Две параллельные прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  касаются окружности  $\omega_1$  с центром  $O_1$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Окружность  $\omega_2$  с центром  $O_2$  касается прямой  $\ell_1$  в точке  $D$ , пересекает прямую  $\ell_2$  в точках  $B$  и  $E$  и вторично пересекает окружность  $\omega_1$  в точке  $C$  (при этом точка  $O_2$  лежит между прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$ ). Известно, что отношение площади четырёхугольника  $BO_1CO_2$  к площади треугольника  $O_2BE$  равно 4. Найдите отношение радиусов окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_1$ .  
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что  $BD = 4$ .
- [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 110 + x - 5^{110}, \\ y \leq \log_5 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.

## 11 класс

ВАРИАНТ 16

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [3 балла] Монету подбрасывают 80 раз (вероятности выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть  $p$  – вероятность того, что орёл выпадет больше 51 раза, а  $q$  – вероятность того, что орёл выпадет не больше 29 раз. Найдите  $p - q$
- [5 баллов] Решите уравнение  $\frac{\cos 4x}{\cos 5x - \sin 5x} + \frac{\sin 4x}{\cos 5x + \sin 5x} = -\sqrt{2}$ .
- [5 баллов] Решите неравенство  $8\sqrt{\log_2 x} - 2\sqrt{4\log_2 x + 3} + 21 \cdot x\sqrt{\log_x 2} \leq 18$ .
- [5 баллов] а) Сфера с центром  $O$  касается боковых рёбер  $SA, SB, SC$  пирамиды  $SABC$  в точках  $K, L, M$  соответственно, а также касается её основания  $ABC$ . Через точку сферы, ближайшую к точке  $S$ , проведена плоскость, касающаяся сферы. Площадь сечения пирамиды  $SABC$  этой плоскостью равна 4, а  $\angle KSO = \arccos \frac{\sqrt{15}}{4}$ . Найдите площадь треугольника  $KLM$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $SO = 18$ , а плоскости  $KLM$  и  $ABC$  параллельны. Найдите объём пирамиды  $SABC$ .
- [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x = -|y - \sqrt{a}| + 6 - \sqrt{a}, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

- [5 баллов] а) Две параллельные прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  касаются окружности  $\omega_1$  с центром  $O_1$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Окружность  $\omega_2$  с центром  $O_2$  касается прямой  $\ell_1$  в точке  $D$ , пересекает прямую  $\ell_2$  в точках  $B$  и  $E$  и вторично пересекает окружность  $\omega_1$  в точке  $C$  (при этом точка  $O_2$  лежит между прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$ ). Известно, что отношение площади четырёхугольника  $BO_1CO_2$  к площади треугольника  $O_2BE$  равно 5. Найдите отношение радиусов окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_1$ .  
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что  $BD = 5$ .
- [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 70 + x - 4^{70}, \\ y \leq \log_4 x. \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более трёх слагаемых.