МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 7 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2?

2. Решите неравенство
$$|x^3-2x^2+2| \geqslant 2-3x.$$

3. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

4. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(60;45)$. Найдите количество таких квадратов.

5. Известно, что одним из корней уравнения $x^2-4a^2b^2x=4$ является $x_1=(a^2+b^2)^2$. Найдите a^4-b^4.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} 4|x|+3|y|=12, \\ x^2+y^2-2x+1-a^2=0 \end{cases}$$

   а) имеет ровно 3 решения;

   б) имеет ровно 2 решения.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP=2$, $MP=4$.

   а) Найдите отрезок DE.

   б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 8 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $2x^2$, его наибольшее значение увеличилось на 10, а когда из него вычли $5x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на $\frac{15}{2}$. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $3x^2$?

2. Решите неравенство
$$|x^3 + 2x^2 - 2| \geqslant -2 - 3x.$$

3. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 120° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

4. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 40)$. Найдите количество таких квадратов.

5. Известно, что одним из корней уравнения $x^2 + 4a^2b^2x = 4$ является $x_1 = (a^2 - b^2)^2$. Найдите $b^4 - a^4$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} 5|x| + 12|y| = 60, \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$$

   а) имеет ровно 3 решения;

   б) имеет ровно 2 решения.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 1$, $MP = 3$.

   а) Найдите отрезок DE.

   б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 15 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

2. Решите неравенство
$$x^2-2x+1-\left|x^3-1\right|-2\left(x^2+x+1\right)^2\geqslant 0.$$

3. В треугольник ABC вписаны два *равных* прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 – на стороне AC). Известно, что $PS=12$, $P_1S_1=3$. Найдите площадь треугольника ABC.

4. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих равенству $x^2+xy=30\,000\,000$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1\leqslant a\leqslant 70$, $1\leqslant b\leqslant 50$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств
$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\geqslant 1,\\ x\leqslant a,\\ y\leqslant b,\end{cases}$$
такова, что число $2S$ кратно 5.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB=3$, $AC=4$, $\angle BAC=60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

7. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases}3|y|-4|x|=6,\\ x^2+y^2-14y+49-a^2=0\end{cases}$$
а) имеет ровно 3 решения;

б) имеет ровно 2 решения.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 16 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 14 и 14. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

2. Решите неравенство
$$x^2+2x+1-\left|x^3+1\right|-2\left(x^2-x+1\right)^2 \leqslant 0.$$

3. В треугольник ABC вписаны два *равных* прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 – на стороне AC). Известно, что $PS=3$, $P_1S_1=9$. Найдите площадь треугольника ABC.

4. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих равенству $y^2-xy=700\,000\,000$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 80$, $1 \leqslant b \leqslant 30$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств
$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$
такова, что число $2S$ кратно 5.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB=4$, $AC=6$, $\angle BAC=60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C. (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

7. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} 5|x|-12|y|=5, \\ x^2+y^2-28x+196-a^2=0 \end{cases}$$
а) имеет ровно 3 решения;

б) имеет ровно 2 решения.

БИЛЕТ 7

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2?

Ответ. Увеличится на $\dfrac{9}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение, его старший коэффициент положителен, а само минимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить $3x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a+3)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+12}+c$. Если из $f(x)$ вычесть x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a-1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-4}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+12}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+9,\\ -\frac{b^2}{4a-4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+12}=9,\\ \frac{b^2}{4a-4}-\frac{b^2}{4a}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3b^2}{4a(a+3)}=9,\\ \frac{b^2}{4a(a-1)}=9.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{3(a-1)}{a+3}=1$, откуда $a=3$. Тогда $b^2=216$, а минимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{216}{12}+c=-18+c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить x^2, то выйдет функция $(a+1)x^2+bx+c$, минимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c=-\frac{216}{16}+c=-\frac{27}{2}+c$, что на $\frac{9}{2}$ больше минимума исходной функции.

2. Решите неравенство $|x^3-2x^2+2|\geqslant 2-3x$.

Ответ. $x\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right]\cup[0;+\infty)$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}x^3-2x^2+2\geqslant 2-3x,\\ x^3-2x^2+2\leqslant -2+3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-2x^2+3x\geqslant 0,\\ x^3-2x^2-3x+4\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\left(x^2-2x+3\right)\geqslant 0,\\ (x-1)\left(x^2-x-4\right)\leqslant 0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 0,\\ x\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[1;\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right]\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right]\cup[0;+\infty).$$

3. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 60° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

Ответ. $\sqrt{3}:1$.

Решение. По теореме о вписанном угле угол DCA равен половине дуги AD, а угол DBC равен половине дуги CD. Значит, $\angle DCH=30^\circ$, $\angle HBC=45^\circ$. Тогда треугольник BHC – прямоугольный и равнобедренный, $BH=HC$. Но $HD=CH\operatorname{tg}30^\circ=\frac{CH}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $BH:HD=\sqrt{3}:1$.

4. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(60;45)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 2070.

Решение. Проведём через данную точку $(60;45)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x=60$ и $y=45$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда "нижняя" вершина квадрата может быть расположена 45 способами: $(60;\,0),(60;\,1),\ldots,(60;\,44)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x=60$ и $y=45$ разделяют плоскость. Рассмотрим "левую нижнюю" вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $15\leqslant x\leqslant 59$, $0\leqslant y\leqslant 44$. Получаем 45^2 способов.

Общее количество способов равно $45^2 + 45 = 46 \cdot 45 = 2070$.

5. Известно, что одним из корней уравнения $x^2 - 4a^2b^2x = 4$ является $x_1 = \left(a^2+b^2\right)^2$. Найдите $a^4 - b^4$.

Ответ. ± 2.

Решение. Подставляя $x = x_1$ в данное уравнение, получаем $\left(a^2+b^2\right)^4 - 4a^2b^2\left(a^2+b^2\right)^2 = 4$, откуда $\left(a^2+b^2\right)^2\left(\left(a^2+b^2\right)^2 - 4a^2b^2\right) = 4$, $\left(a^2+b^2\right)^2\left(a^2-b^2\right)^2 = 4$, $\left(a^4-b^4\right)^2 = 4$, следовательно, $a^4 - b^4 = \pm 2$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} 4|x| + 3|y| = 12, \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$ а) имеет ровно 3 решения; б) имеет ровно 2 решения.

Ответ. а) $|a| = 2$; б) $|a| \in \left\{\frac{8}{5}\right\} \bigcup \left(2; \frac{16}{5}\right) \bigcup \left\{\sqrt{17}\right\}$.

Решение. Первое уравнение системы не меняется при замене x на $-x$ и/или y на $-y$. Следовательно, множество точек, задаваемых первым уравнением симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти получаем часть прямой $y = 4 - \frac{4}{3}x$ – отрезок, соединяющий точки $(3; 0)$ и $(0; 4)$. Используя симметрию множества относительно координатных осей, получаем ромб с вершинами $A(3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(-3; 0)$, $D(0; -4)$.

Второе уравнение системы может быть записано в виде $(x-1)^2 + y^2 = a^2$. Оно задаёт окружность с центром $Q(1; 0)$ радиуса $|a|$ (или точку Q, если $a = 0$). При $a = 0$ решений нет, так что рассмотрим случай окружности.

а) И ромб, и окружность симметричны относительно оси абсцисс, следовательно 3 решения возможны только в том случае, когда одна из общих точек окружности и ромба лежит на оси абсцисс. Это происходит, если радиус окружности равен отрезку QA или отрезку QC, т.е. $|a| = 2$ или $|a| = 4$. Несложно видеть, что при $|a| = 2$ система имеет 3 решения, а при $|a| = 4$ – 5 решений. Значит, 3 решения возможны только при $a = \pm 2$.

б) Пусть R_0 – радиус той окружности, которая касается сторон BC и CD, а R_1 – радиус той окружности, которая касается сторон AB и AD ромба. Система имеет ровно два решения в том и только том случае, когда $|a| \in \{R_1\} \cup (QA; R_0) \cup \{QB\}$.

QA=2, $QB = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$. Пусть окружность радиуса R_1 касается стороны AB в точке J, а окружность радиуса R_0 касается стороны BC в точке L. Треугольник CLQ – прямоугольный, $tg\angle C$ равен угловому коэффициенту прямой BC, т.е. $tg\angle C = \frac{4}{3}$. Тогда $CL = \frac{LQ}{tg\angle C} = \frac{3R_0}{4}$. По теореме Пифагора для треугольника CLQ получаем $16 = R_0^2 + \frac{9R_0^2}{16}$, откуда $R_0 = \frac{16}{5}$. Поскольку треугольники JQA и LQC подобны и коэффициент подобия равен $\frac{QA}{QC} = \frac{1}{2}$, то $R_1 = QJ = \frac{1}{2}QL = \frac{8}{5}$. Окончательно получаем $|a| \in \left\{\frac{8}{5}\right\} \bigcup \left(2; \frac{16}{5}\right) \bigcup \left\{\sqrt{17}\right\}$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 2$, $MP = 4$.

а) Найдите отрезок DE.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

Ответ. а) $DE = 8$; б) $R = 2\sqrt{85}$.

Решение. а) По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD : DB = AM : MB$, $CE : EB = CM : MB$, а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что $AD : DB = CE : EB$, поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник PDM – равнобедренный и $DP = MP = 4$. Аналогично получаем, что $EP = 4$ и тогда $DE = 8$.

б) Трапеция $ADEC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая. Отрезок PM, соединяющий середины оснований трапеции, им перпендикулярен. Из подобия прямоугольных треугольников BPD и BMA находим, что $MA = PD \cdot \frac{MP}{MB} = 12$. Пусть EH – высота трапеции. Тогда $AH = AM + MH = AM + PE = 16$, $AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 4\sqrt{17}$, $CH = CM - MH = 8$, $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = 4\sqrt{5}$, $\sin\angle HCE = \frac{EH}{EC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Данная окружность является описанной около треугольника ACE, поэтому её радиус R равен $\frac{AE}{2\sin\angle ACE} = 2\sqrt{85}$.

БИЛЕТ 8

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $2x^2$, его наибольшее значение увеличилось на 10, а когда из него вычли $5x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на $\frac{15}{2}$. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $3x^2$?

Ответ. Увеличится на $\frac{45}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наибольшее значение, его старший коэффициент отрицателен, а само максимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$.

Если к $f(x)$ прибавить $2x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a+2)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+8} + c$. Если из $f(x)$ вычесть $5x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a-5)x^2 + bx + c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-20} + c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases} -\frac{b^2}{4a+8} + c = -\frac{b^2}{4a} + c + 10, \\ -\frac{b^2}{4a-20} + c = -\frac{b^2}{4a} + c - \frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a+8} = 10, \\ \frac{b^2}{4a-20} - \frac{b^2}{4a} = \frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2b^2}{4a(a+2)} = 10, \\ \frac{5b^2}{4a(a-5)} = \frac{15}{2}. \end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{2(a-5)}{5(a+2)} = \frac{20}{15}$, откуда $a = -5$. Тогда $b^2 = 300$, а максимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{300}{-20}+c = 15+c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить $3x^2$, то выйдет функция $(a+3)x^2+bx+c$, максимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+12}+c = -\frac{300}{-8}+c = \frac{75}{2}+c$, что на $\frac{45}{2}$ больше максимума исходной функции.

2. Решите неравенство $|x^3 + 2x^2 - 2| \geqslant -2 - 3x$.

Ответ. $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup [-1; +\infty)$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^3 + 2x^2 - 2 \geqslant -2 - 3x, \\ x^3 + 2x^2 - 2 \leqslant 2 + 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3 + 2x^2 + 3x \geqslant 0, \\ x^3 + 2x^2 - 3x - 4 \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\left(x^2 + 2x + 3\right) \geqslant 0, \\ (x+1)\left(x^2 + x - 4\right) \leqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left[-1; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right] \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right] \cup [-1; +\infty).$$

3. Продолжение высоты BH треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D (*точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC*). Градусные меры дуг AD и CD, не содержащих точки B, равны 120° и 90° соответственно. Определите, в каком отношении отрезок BD делится стороной AC.

Ответ. $1 : \sqrt{3}$.

Решение. По теореме о вписанном угле угол DCA равен половине дуги AD, а угол DBC равен половине дуги CD. Значит, $\angle DCH = 60^\circ$, $\angle HBC = 45^\circ$. Тогда треугольник BHC – прямоугольный и равнобедренный, $BH = HC$. Но $HD = CH \operatorname{tg} 60^\circ = CH\sqrt{3}$. Следовательно, $BH : HD = 1 : \sqrt{3}$.

4. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 40)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 1560.

Решение. Проведём через данную точку $(55; 40)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 55$ и $y = 40$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда “нижняя” вершина квадрата может быть расположена 39 способами: $(55;\ 1), (55;\ 1), \ldots, (55;\ 39)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 55$ и $y = 40$ разделяют плоскость. Рассмотрим “левую нижнюю” вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались натуральными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $16 \leqslant x \leqslant 54$, $1 \leqslant y \leqslant 39$. Получаем 39^2 способов.

Общее количество способов равно $39^2 + 39 = 39 \cdot 40 = 1560$.

5. Известно, что одним из корней уравнения $x^2 + 4a^2b^2x = 4$ является $x_1 = \left(a^2 - b^2\right)^2$. Найдите $b^4 - a^4$.

Ответ. ± 2.

Решение. Подставляя $x = x_1$ в данное уравнение, получаем $\left(a^2 - b^2\right)^4 + 4a^2b^2\left(a^2 - b^2\right)^2 = 4$, откуда $\left(a^2 - b^2\right)^2\left(\left(a^2 - b^2\right)^2 + 4a^2b^2\right) = 4$, $\left(a^2 - b^2\right)^2\left(a^2 + b^2\right)^2 = 4$, $\left(a^4 - b^4\right)^2 = 4$, следовательно, $b^4 - a^4 = \pm 2$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система $\begin{cases} 5|x| + 12|y| = 60, \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$ а) имеет ровно 3 решения; б) имеет ровно 2 решения.

Ответ. а) $|a| = 4$; б) $|a| \in \left\{\dfrac{48}{13}\right\} \cup \left(4; \dfrac{72}{13}\right) \cup \left\{\sqrt{145}\right\}$.

Решение. Первое уравнение системы не меняется при замене x на $-x$ и/или y на $-y$. Следовательно, множество точек, задаваемых первым уравнением симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти получаем часть прямой $y = 4 - \frac{4}{3}x$ – отрезок, соединяющий точки $(12; 0)$ и $(0; 5)$. Используя симметрию множества относительно координатных осей, получаем ромб с вершинами $A(0; 5)$, $B(-12; 0)$, $C(0; -5)$, $D(12; 0)$.

Второе уравнение системы может быть записано в виде $x^2 + (y-1)^2 = a^2$. Оно задаёт окружность с центром $Q(0; 1)$ радиуса $|a|$ (или точку Q, если $a = 0$). При $a = 0$ решений нет, так что рассмотрим случай окружности.

а) И ромб, и окружность симметричны относительно оси ординат, следовательно 3 решения возможны только в том случае, когда одна из общих точек окружности и ромба лежит на оси ординат. Это происходит, если радиус окружности равен отрезку QA или отрезку QC, т.е. $|a| = 4$ или $|a| = 6$. Несложно видеть, что при $|a| = 4$ система имеет 3 решения, а при $|a| = 6$ – 5 решений. Значит, 3 решения возможны только при $a = \pm 4$.

б) Пусть R_0 – радиус той окружности, которая касается сторон BC и CD, а R_1 – радиус той окружности, которая касается сторон AB и AD ромба. Система имеет ровно два решения в том и только том случае, когда $|a| \in \{R_1\} \cup (QA; R_0) \cup \{QB\}$.

$QA{=}4$, $QB = \sqrt{12^2 + 1^2} = \sqrt{145}$. Пусть окружность радиуса R_1 касается стороны AB в точке J, а окружность радиуса R_0 касается стороны BC в точке L. Треугольник JAQ – прямоугольный, $\angle JQA = 90^\circ - \angle JAQ = \angle ABD$, поэтому $tg\angle JQA = tg\angle ABD = \frac{5}{12}$, т.к. он равен угловому коэффициенту прямой AB. Тогда $AJ = JQtg\angle JQA = \frac{5R_1}{12}$. По теореме Пифагора для треугольника JQA получаем $16 = R_1^2 + \frac{25R_1^2}{144}$, откуда $R_1 = \frac{48}{13}$. Поскольку треугольники JQA и LQC подобны и коэффициент подобия равен $\frac{QA}{QC} = \frac{2}{3}$, то $R_0 = QL = \frac{3}{2}QJ = \frac{72}{13}$. Окончательно получаем $|a| \in \left\{\frac{48}{13}\right\} \cup \left(4; \frac{72}{13}\right) \cup \left\{\sqrt{145}\right\}$.

7. В треугольнике ABC проведена медиана BM; MD и ME – биссектрисы треугольников AMB и CMB соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке P, причём $BP = 1$, $MP = 3$.

а) Найдите отрезок DE.

б) Пусть дополнительно известно, что около четырёхугольника $ADEC$ можно описать окружность. Найдите её радиус.

Ответ. а) $DE = 6$; б) $R = 3\sqrt{65}$.

Решение. а) По свойству биссектрисы треугольника получаем $AD : DB = AM : MB$, $CE : EB = CM : MB$, а так как $AM = CM$, то отсюда следует, что $AD : DB = CE : EB$, поэтому $AC \parallel DE$. Но тогда $\angle PDM = \angle AMD = \angle BMD$, значит, треугольник PDM – равнобедренный и $DP = MP = 3$. Аналогично получаем, что $EP = 3$ и тогда $DE = 6$.

б) Трапеция $ADEC$ вписана в окружность, следовательно, она равнобокая. Отрезок PM, соединяющий середины оснований трапеции, им перпендикулярен. Из подобия прямоугольных треугольников BPD и BMA находим, что $MA = PD \cdot \frac{MP}{MB} = 12$. Пусть EH – высота трапеции. Тогда $AH = AM + MH = AM + PE = 15$, $AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 3\sqrt{26}$, $CH = CM - MH = 9$, $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = 3\sqrt{10}$, $\sin\angle HCE = \frac{EH}{EC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Данная окружность является описанной около треугольника ACE, поэтому её радиус R равен $\frac{AE}{2\sin\angle ACE} = 3\sqrt{65}$.

БИЛЕТ 15

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

Ответ. $\dfrac{41}{4}$.

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n + 0{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\left(x - n - 0{,}5\right)^2 + c$. Так как $f(n) = 13$, $f(n+2) = 35$, то получаем $\frac{a}{4} + c = 13$, $\frac{9a}{4} + c = 35$, откуда $a = 11$, $c = \frac{41}{4}$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наименьшее значение функции.

2. Решите неравенство $x^2 - 2x + 1 - |x^3 - 1| - 2\left(x^2 + x + 1\right)^2 \geqslant 0$.

Ответ. $x \in \left[-1; -\dfrac{1}{2}\right]$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$|x-1|^2 - |x-1|\left(x^2+x+1\right) - 2\left(x^2+x+1\right)^2 \geqslant 0.$$

Обозначим здесь $|x-1| = u$, $x^2+x+1 = v$ (заметим, что $u \geqslant 0$, $v > 0$, так как v – квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом). Тогда неравенство принимает вид $u^2 - uv - 2v^2 \geqslant 0$. Раскладывая левую часть на множители (например, рассмотрев как квадратичную функцию относительно u и найдя корни), получаем $(u+v)(u-2v) \geqslant 0$. Первый множитель положителен, поэтому $u \geqslant 2v$. Возвращаемся к переменной x:

$$2x^2+2x+2 \leqslant |x-1| \Leftrightarrow \left(2x^2+2x+2\right)^2 - (x-1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(2x^2+3x+1\right)\left(2x^2+x+3\right) \leqslant 0$$

Второй множитель положителен, поэтому остаётся $2x^2+3x+1 \leqslant 0$, откуда $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}$.

3. В треугольник ABC вписаны два *равных* прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 – на стороне AC). Известно, что $PS = 12$, $P_1S_1 = 3$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ. $\dfrac{225}{2}$.

Решение. Проведём высоту BF треугольника ABC. Пусть она пересекает отрезки PQ и P_1Q_1 в точках H и M соответственно. Заметим, что $HM = 9$. Из подобия треугольников BPQ и BP_1Q_1 следует, что $\frac{BH}{PQ} = \frac{BM}{P_1Q_1}$ (записано отношение высоты к основанию), откуда $\frac{BH}{3} = \frac{9+BH}{1}2$, $BH = 3$. Значит, площадь треугольника BPQ равна $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Но треугольники ABC и BPQ подобны (коэффициент подобия равен $BF : BH = 15 : 3 = 5$), следовательно, площадь треугольника ABC равна $25 \cdot \frac{9}{2} = \frac{225}{2}$.

4. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих равенству $x^2 + xy = 30\,000\,000$.

Ответ. 256.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $x(x+y) = 3 \cdot 2^7 \cdot 5^7$. Тогда если $x > 0$, то x является одним из делителей правой части. Всего у правой части $2 \cdot 8 \cdot 8 = 128$ делителей (так как любой делитель представи́м в виде $3^a \cdot 2^b \cdot 5^c$, где a, b и c – целые неотрицательные числа, не превосходящие соответственно 1, 7 и 7, т.е. есть 2 способа выбрать a, 8 способов выбрать b и 8 способов выбрать c). Заметим, что если правая часть делится на x, то тогда автоматически выходит, что $y \in \mathbb{Z}$, и при этом y находится однозначно. Следовательно, всего есть $2 \cdot 128 = 256$ пары чисел.

5. Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 70$, $1 \leqslant b \leqslant 50$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

Ответ. 1260.

Решение. Данная система неравенств задаёт на плоскости треугольник с вершинами $(a;0)$, $(0;b)$ и $(a;b)$. Этот треугольник прямоугольный, его удвоенная площадь равна произведению катетов, т.е. ab. По условию $ab \,\vdots\, 5$, поэтому одно из чисел a или b должно делиться на 5.

При указанных ограничениях есть 14 значений a и 10 значений b, кратных 5. Значит, существует $14 \cdot 50 = 700$ пар $(a;b)$ таких, что $a \,\vdots\, 5$ и $10 \cdot 70 = 700$ пар таких, что $b \,\vdots\, 5$. Кроме того, есть $14 \cdot 10 = 140$ пар таких, что оба числа a и b делятся на 5. Тогда всего искомых пар $700 + 700 - 140 = 1260$.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $AC = 4$, $\angle BAC = 60°$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

Ответ. $S_{\triangle OA_2C} = \dfrac{13\sqrt{3}}{12}$; $S_{\triangle A_1A_2C} = \dfrac{13\sqrt{3}}{21}$.

Решение. По теореме косинусов для треугольника ABC находим, что $BC^2 = 16+9-2\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot4 = 13$, $BC = \sqrt{13}$. Тогда по теореме синусов радиус окружности R равен $\frac{BC}{2\sin 60°} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$. Угол A_2OC – центральный, поэтому он вдвое больше угла A_2AC, который по условию равен $30°$, поэтому $\angle A_2OC = 60°$. Тогда площадь треугольника OA_2C равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 = \frac{13}{4\sqrt{3}}$.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $A_1C : A_1B = AC : AB = 4 : 3$, откуда $A_1C = \frac{4}{7}BC = \frac{4}{7}\sqrt{13}$. Треугольник OA_2C – равносторонний, поэтому $A_2C = R$. Углы A_2CA_1 и A_2AB равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, поэтому $\angle A_2CA_1 = 30°$. Значит, $S_{A_1A_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}\sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} \cdot \sin 30° = \frac{13}{7\sqrt{3}}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 3|y| - 4|x| = 6, \\ x^2 + y^2 - 14y + 49 - a^2 = 0 \end{cases}$$

а) имеет ровно 3 решения; б) имеет ровно 2 решения.

Ответ. а) $|a| \in \{5; 9\}$; b) $|a| \in \{3\} \cup (5; 9)$.

Решение. Первое уравнение системы не меняется при замене x на $-x$ и/или y на $-y$. Следовательно, множество точек, задаваемых первым уравнением симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти получаем часть прямой $y = 2 + \frac{4}{3}x$ – луч с началом в точке $(0; 2)$ и угловым коэффициентом $\frac{4}{3}$. Используя симметрию множества относительно координатных осей, получаем 2 угла: один с вершиной в точке $A(0; 2)$ с ветвями вверх, а другой – с вершиной $C(0; -2)$ и ветвями вниз (угловые коэффициенты сторон угла равны $\pm\frac{4}{3}$).

Второе уравнение системы может быть записано в виде $x^2 + (y-7)^2 = a^2$. Оно задаёт окружность с центром $Q(0; 7)$ радиуса $|a|$ (или точку Q, если $a = 0$). При $a = 0$ решений нет, так что рассмотрим случай окружности.

а) И окружность, и множество точек, задаваемых первым уравнением, симметричны относительно оси ординат, следовательно 3 решения возможны только в том случае, когда одна из их общих точек лежит на оси ординат. Это происходит, если радиус окружности равен отрезку QA или отрезку QC, т.е. $|a| = 5$ или $|a| = 9$. Несложно видеть, что при этих a окружность имеет ещё две общие точки со сторонами угла, лежащего в верхней полуплоскости, и всего у системы получается 3 решения. Тогда $a = \pm5$ или $a = \pm9$.

б) Пусть R_0 – радиус той окружности, которая касается сторон угла с вершиной A. Система имеет два решения при $|a| \in \{R_0\} \cup (QA;\, QC)$.

Опустим из точки Q перпендикуляр QH на сторону угла, лежащую в первой четверти. Пусть α – угол наклона прямой AH ($\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$). Тогда $\angle QAH = 90^\circ - \alpha$, $\angle AQH = \alpha$. Так как $QH = R_0$, то $AH = QH \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}R_0$ и по теореме Пифагора для треугольника AQH получаем $R_0^2 + \frac{16}{9}R_0^2 = 25$, откуда $R_0 = 3$. Значит, $|a| \in \{3\} \cup (5; 9)$.

БИЛЕТ 16

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 14 и 14. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

Ответ. 15.

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n+1{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\left(x-n-1{,}5\right)^2 + c$. Так как $f(n) = 6$, $f(n+1) = 14$, то получаем $\frac{9}{4}a + c = 6$, $\frac{a}{4} + c = 14$, откуда $a = -4$, $c = 15$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наибольшее значение функции.

2. Решите неравенство $x^2 + 2x + 1 - |x^3+1| - 2\left(x^2 - x + 1\right)^2 \leqslant 0$.

Ответ. $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$|x+1|^2 - |x+1|\left(x^2-x+1\right) - 2\left(x^2-x+1\right)^2 \leqslant 0.$$

Обозначим здесь $|x+1| = u$, $x^2 - x + 1 = v$ (заметим, что $u \geqslant 0$, $v > 0$, так как v – квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом). Тогда неравенство принимает вид $u^2 - uv - 2v^2 \leqslant 0$. Раскладывая левую часть на множители (например, рассмотрев как квадратичную функцию относительно u и найдя корни), получаем $(u+v)(u-2v) \leqslant 0$. Первый множитель положителен, поэтому $u \leqslant 2v$. Возвращаемся к переменной x:

$$2x^2 - 2x + 2 \geqslant |x+1| \Leftrightarrow \left(2x^2-2x+2\right)^2 - (x+1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2-x+3\right) \geqslant 0$$

Второй множитель положителен, поэтому остаётся $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$, откуда $x \leqslant \frac{1}{2}$ или $x \geqslant 1$.

3. В треугольник ABC вписаны два *равных* прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 – на стороне AC). Известно, что $PS = 3$, $P_1S_1 = 9$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ. 72.

Решение. Проведём высоту BF треугольника ABC. Пусть она пересекает отрезки PQ и P_1Q_1 в точках H и M соответственно. Заметим, что $HM = 6$. Из подобия треугольников BPQ и BP_1Q_1 следует, что $\frac{BH}{PQ} = \frac{BM}{P_1Q_1}$ (записано отношение высоты к основанию), откуда $\frac{BH}{3} = \frac{6+BH}{9}$, $BH = 3$. Значит, площадь треугольника BPQ равна $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Но треугольники ABC и BPQ подобны (коэффициент подобия равен $BF : BH = 12 : 3 = 4$), следовательно, площадь треугольника ABC равна $16 \cdot \frac{9}{2} = 72$.

4. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих равенству $y^2 - xy = 700\,000\,000$.

Ответ. 324.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $y(y-x) = 7 \cdot 2^8 \cdot 5^8$. Тогда если $y > 0$, то y является одним из делителей правой части. Всего у правой части $2 \cdot 9 \cdot 9 = 162$ делителя (так как любой делитель представи́м в виде $7^a \cdot 2^b \cdot 5^c$, где a, b и c – целые неотрицательные числа, не превосходящие соответственно 1, 8 и 8, т.е. есть 2 способа выбрать a, 9 способов выбрать b и 9 способов выбрать c). Заметим, что если правая часть делится на y, то тогда автоматически выходит, что $x \in \mathbb{Z}$, и при этом x находится однозначно. Следовательно, всего есть $2 \cdot 162 = 324$ пары чисел.

5. Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 80$, $1 \leqslant b \leqslant 30$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

Ответ. 864.

Решение. Данная система неравенств задаёт на плоскости треугольник с вершинами $(a;0)$, $(0;b)$ и $(a;b)$. Этот треугольник прямоугольный, его удвоенная площадь равна произведению катетов, т.е. ab. По условию $ab \,\vdots\, 5$, поэтому одно из чисел a или b должно делиться на 5.

При указанных ограничениях есть 16 значений a и 6 значений b, кратных 5. Значит, существует $16 \cdot 30 = 480$ пар $(a;b)$ таких, что $a \,\vdots\, 5$ и $6 \cdot 80 = 480$ пар таких, что $b \,\vdots\, 5$. Кроме того, есть $16 \cdot 6 = 96$ пар таких, что оба числа a и b делятся на 5. Тогда всего искомых пар $480 + 480 - 96 = 864$.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C. (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

Ответ: $S_{OA_2C} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$; $S_{A_1A_2C} = \dfrac{7\sqrt{3}}{5}$.

Решение. По теореме косинусов для треугольника ABC находим, что $BC^2 = 16+36-2\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot4 = 28$, $BC = \sqrt{28}$. Тогда по теореме синусов радиус окружности R равен $\frac{BC}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}}$. Угол A_2OC – центральный, поэтому он вдвое больше угла A_2AC, который по условию равен 30°, поэтому $\angle A_2OC = 60^\circ$. Тогда площадь треугольника OA_2C равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $A_1C : A_1B = AC : AB = 6 : 4$, откуда $A_1C = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5}\sqrt{28}$. Треугольник OA_2C – равносторонний, поэтому $A_2C = R$. Углы A_2CA_1 и A_2AB равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, поэтому $\angle A_2CA_1 = 30^\circ$. Значит, $S_{A_1A_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{28} \cdot \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{5}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 5|x| - 12|y| = 5, \\ x^2 + y^2 - 28x + 196 - a^2 = 0 \end{cases}$$

а) имеет ровно 3 решения; б) имеет ровно 2 решения.

Ответ. a) $|a| \in \{13; 15\}$; b) $|a| \in \{5\} \cup (13; 15)$.

Решение. Первое уравнение системы не меняется при замене x на $-x$ и/или y на $-y$. Следовательно, множество точек, задаваемых первым уравнением симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти получаем часть прямой $y = \frac{5x}{12} - \frac{5}{12}$ – луч с началом в точке $(1;0)$ и угловым коэффициентом $\frac{5}{12}$. Используя симметрию множества относительно координатных осей, получаем 2 угла: один с вершиной в точке $A(1;0)$ с ветвями вправо, а другой – с вершиной $C(-1;0)$ и ветвями влево (угловые коэффициенты сторон угла равны $\pm\frac{5}{12}$).

Второе уравнение системы может быть записано в виде $(x-14)^2+y^2 = a^2$. Оно задаёт окружность с центром $Q(14;\ 0)$ радиуса $|a|$ (или точку Q, если $a = 0$). При $a = 0$ решений нет, так что рассмотрим случай окружности.

а) И окружность, и множество точек, задаваемых первым уравнением, симметричны относительно оси абсцисс, следовательно 3 решения возможны только в том случае, когда одна из их общих точек лежит на оси абсцисс. Это происходит, если радиус окружности равен отрезку QA или отрезку QC, т.е. $|a| = 13$ или $|a| = 15$. Несложно видеть, что при этих a окружность имеет ещё две общие точки со сторонами угла, лежащего в правой полуплоскости, и всего у системы получается 3 решения. Тогда $a = \pm13$ или $a = \pm15$.

б) Пусть R_0 – радиус той окружности, которая касается сторон угла с вершиной A. Система имеет два решения при $|a| \in \{R_0\} \cup (QA;\ QC)$.

Опустим из точки Q перпендикуляр QH на сторону угла, лежащую в первой четверти. Пусть α – угол наклона прямой AH ($\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$). Тогда $\angle QAH = \alpha$. Так как $QH = R_0$, то $AH = \frac{QH}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{12}{5}R_0$ и по теореме Пифагора для треугольника AQH получаем $R_0^2 + \frac{144}{25}R_0^2 = 169$, откуда $R_0 = 5$. Значит, $|a| \in \{5\} \cup (13; 15)$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу.

1. (5 баллов) верно составлены уравнения на коэффициенты трёхчлена – 2 балла.

Найдены коэффициенты трёхчлена – 2 балла.

Не проверено, что в вершине параболы действительно достигается максимум (минимум) – баллы не снимаются.

Если вместо $y_{\text{вершины}}$ исследуется значение $x_{\text{вершины}}$, то 0 баллов за задачу.

2. (6 баллов) Неравенство $f \geqslant g$ сведено к совокупности неравенств без модуля $\left[\begin{array}{l} f \geqslant g, \\ f \leqslant -g \end{array}\right.$ – 3 балла.

Решено неравенство со свободным членом, равным 0 – 1 балл.

Решено неравенство со свободным членом, отличным от нуля – 2 балла.

Если решение неравенства происходит по схеме $f \geqslant g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geqslant 0, \\ f \geqslant g, \end{cases} \\ \begin{cases} f < 0, \\ -f \geqslant g \end{cases} \end{array}\right.$ и при этом условия $f \geqslant 0$, $f < 0$ не учтены, то не более 2 баллов за задачу.

3. (5 баллов) Найдены угол B треугольника ABC – 1 балл.

Найдены углы A и C треугольника ABC – 1 балл.

4. (5 баллов) Верно выделено множество возможных положений вершин(ы) искомых квадратов – 3 балла.

Верный подсчёт – 2 балла (*если в произведении $a \cdot b$ один или оба множителя отличаются от верного на 1, то 1 балл вместо 2*).

5. (5 баллов) Потеряно одно из решений – снять 2 балла.

6. (7 баллов) Изображено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы – 1 балл.

Показано, что второе уравнение системы задаёт окружность переменного радиуса (или точку) – 1 балл.

Решён пункт а) – 2 балла. Если указано, что нечётное число решений может быть только когда окружность проходит через вершину ромба, принадлежащую его меньшей диагонали, и при этом получен неверный ответ (лишние решения), то 1 балл вместо 2.

Решён пункт б) – 3 балла.

Отсутствует проверка того, что если окружность проходит через ближайшую вершину ромба, то она не имеет общих точек с двумя дальними сторонами ромба и пр. – баллы не снимать.

Если радиус окружности равен a вместо $|a|$, то снять 1 балл при условии, что полностью решён хотя бы один из пунктов а) или б).

7. (7 баллов) Доказано, что $DE \| AC$ – 2 балла.

Найден отрезок DE – 2 балла.

Если в пункте а) параллельность DE и AC утверждается без доказательства, то снять 1 балл.

Решён пункт б) – 3 балла.

То, что трапеция, вписанная в окружность, является равнобокой, можно использовать без доказательства!

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу.

1. (5 баллов) Трёхчлен представлен в виде $(x-n)(x-(n+1))+c$ или в виде $a(x-x_1)^2+c$ (сделан подходящий сдвиг параболы) – 2 балла.

При решении "в лоб" с нахождением коэффициентов многочлена ax^2+bx+c :
– составлена система для нахождения a, b, c, n – 1 балл;
– найден коэффициент a – 1 балл;
– выписано выражение для минимума (максимума) в терминах a, b, n – 1 балл.

2. (7 баллов) Левая часть неравенства разложена на два множителя – 3 балла.
Задача сведена к квадратному неравенству с модулем – 1 балл.
Решено это неравенство – 3 балла.

3. (6 баллов)

4. (6 баллов) Левая часть уравнения разложена на множители – баллы не добавляются.
Показано, что для любого целого значения x существует единственное целое значение y – 2 балла.
Сделан подсчёт – 4 балла.
Если при этом не учтены отрицательные значения x – 2 балла вместо 4.

5. (4 балла) Изображено множество точек, удовлетворяющих системе неравенств – 1 балл.

Указано, что условие $2S \,\vdots\, 5$ эквивалентно условию $ab \,\vdots\, 5$ – 1 балл.
Подсчитано количество вариантов – 2 балла.

6. (6 баллов) Найден отрезок BC –1 балл.
Найден радиус окружности –1 балл.
Доказано, что треугольник OA_2C – равносторонний и найдена его площадь – 1 балл.
Найдена площадь треугольника A_1A_2C – 3 балла.

7. (6 баллов) Изображено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы – 1 балл.

Показано, что второе уравнение системы задаёт окружность переменного радиуса (или точку) – 1 балл.

Решён пункт а) – 2 балла.

Решён пункт б) – 2 балла.

Если радиус окружности равен a вместо $|a|$, то снять 1 балл при условии, что решён хотя бы один из пунктов а) или б).