МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 11 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{30}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 3$ равно $\sqrt{46}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$.

2. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} - \sqrt[6]{4x^2}}{(x^2 - 4|x|)^2 - 8x^2 + 32|x| - 48} \geqslant 0.$$

3. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 2 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна $\frac{36}{5}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

4. В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 10$, $BC = 24$.

5. Есть 200 различных карточек с числами $2, 3, 2^2, 3^2, \ldots, 2^{100}, 3^{100}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} y - x \geqslant |x + y|, \\ \frac{x^2+8x+y^2+6y}{2y-x-8} \leqslant 0. \end{cases}$$
Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

7. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 4$.

   а) Найдите AP.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 3, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 12 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $3\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 3$ равно $3\sqrt{14}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

2. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt[6]{4x^2} - \sqrt[3]{x^2}}{(x^2 - 2|x|)^2 + 4|x| - 2x^2 - 3} \leqslant 0.$$

3. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 10 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна 20. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

4. В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 30$, $BC = 16$.

5. Есть 100 различных карточек с числами $2, 5, 2^2, 5^2, \ldots, 2^{50}, 5^{50}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} x + y + |x - y| \leqslant 0, \\ \frac{x^2+6x+y^2-8y}{x+3y+6} \geqslant 0. \end{cases}$$
Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

7. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 6. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 2$.

   а) Найдите AP.

   б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 4. Пусть T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Билет 11

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x)$ равно $\sqrt{30}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x)+3$ равно $\sqrt{46}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2 - 1$ и $y = f(x)+1$.

Ответ: $\sqrt{38}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 - 1 = ax + b$, а во втором случае – из уравнения $x^2 = ax + b + 3$.

Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - (b+1) = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b+4}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2+4b+4}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2+1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+4)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2+1)(a^2+4b+12)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases} (a^2+1)(a^2+4b+4) = 30, \\ (a^2+1)(a^2+4b+12) = 46, \end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 1$, $b = \frac{5}{2}$.

Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b - 2 = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2+4b+8} = \sqrt{19}$, а расстояние между самими точками пересечения есть

$|x_2 - x_1|\sqrt{a^2+1} = \sqrt{19}\sqrt{2} = \sqrt{38}$.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} - \sqrt[6]{4x^2}}{(x^2-4|x|)^2 - 8x^2 + 32|x| - 48} \geqslant 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -6) \cup [-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4] \cup (6; +\infty)$.

Решение. Рассмотрим знаменатель дроби. Его можно записать в виде $\left(x^2 - 4|x|\right)^2 - 8\left(x^2 - 4|x|\right) - 48$, или, если обозначить $x^2 - 4|x| = t$, в виде $t^2 - 8t - 48 = (t-12)(t+4)$. Если вернуться обратно к переменной x, выходит выражение $\left(x^2 - 4|x| - 12\right)\left(x^2 - 4|x| + 4\right) = (|x|-6)(|x|+2)(|x|-2)^2$. Итак, исходное неравенство равносильно следующему

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} - \sqrt[3]{2|x|}}{(|x|-6)(|x|+2)(|x|-2)^2} \geqslant 0 \qquad (1)$$

.

В последнем неравенстве необходимо сравнить дробь с нулём, или, что то же самое, определить знак этой дроби. Это означает, что если мы заменим числитель или любой из множителей в знаменателе выражением того же знака, то получим неравенство, равносильное исходному. Заметим, что знак выражения $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ совпадает со знаком выражения $a - b$ при любых a и b; выражение $|a| - b$ при $b < 0$ положительно, а при $b > 0$ его знак совпадает со знаком выражения $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Следовательно, неравенство (1) равносильно следующему

$$\frac{\frac{x^2}{2} - 2|x|}{\left(x^2-36\right)\left(x^2-4\right)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{|x|(|x|-4)}{\left(x^2-36\right)\left(x^2-4\right)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-4)(x+4)}{(x-6)(x+6)(x-2)^2(x+2)^2} \geqslant 0.$$

Метод интервалов, применённый к последнему неравенству, даёт

$x \in (-\infty; -6) \cup [-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4] \cup (6; +\infty)$.

3. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 2 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна $\frac{36}{5}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Ответ: $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$.

Решение. Известно, что сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q равна $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q| < 1$, поэтому при n, стремящемся к бесконечности, q^n стремится к нулю, а сумма членов стремится к $\frac{b_1}{1-q}$.

Все члены данной прогрессии $\{b_n\}$ с нечётными номерами также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1 и знаменателем q^2, а все члены с чётными номерами – геометрическую прогрессию с первым членом $b_2 = b_1 q$ и знаменателем q^2. Суммы этих членов равны соответственно $\frac{b_1}{1-q^2}$ и $\frac{b_1 q}{1-q^2}$.

Квадраты членов прогрессии на нечётных местах и на чётных местах также образуют геометрические прогрессии с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2 и с первым членом $b_2^2 = b_1^2 q^2$ и знаменателем q^4 соответственно. Их суммы равны $\frac{b_1^2}{1-q^4}$ и $\frac{b_1^2 q^2}{1-q^4}$. Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q^2} - \frac{b_1 q}{1-q^2} = 2, \\ \frac{b_1^2}{1-q^4} - \frac{b_1^2 q^2}{1-q^4} = \frac{36}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1(1-q)}{(1-q)(1+q)} = 2, \\ \frac{b_1^2(1-q^2)}{(1-q^2)(1+q^2)} = \frac{36}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1+q} = 2, \\ \frac{b_1^2}{1+q^2} = \frac{36}{5}. \end{cases}$$

Возводим обе части первого уравнения в квадрат, а затем делим почленно второе уравнение на первое. Получаем $\frac{1+2q+q^2}{1+q^2} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 4q^2 - 10q + 4 = 0$, откуда $q = 2$ или $q = \frac{1}{2}$. Так как прогрессия является бесконечно убывающей, $|q| < 1$, и подходит только значение $q = \frac{1}{2}$. Тогда $b_1 = 2(1+q) = 3$.

4. В окружность Ω радиуса 13 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 10$, $BC = 24$.

Ответ: $\frac{289}{338}$ или $\frac{1}{2}$.

Решение. Проведём через центр окружности O прямую, перпендикулярную основаниям трапеции. Пусть она пересекает AD и BC в точках N и M соответственно. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, $BM = MC = 12$, $AN = ND = 5$. По теореме Пифагора из треугольников OND и OMC находим, что $ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = 12$, $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 5$. Возможны два случая.

1) Точка O не лежит на отрезке MN. Тогда высота трапеции есть $MN = ON - OM = 7$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины D на основание BC. Так как трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная, $BH = \frac{AD+BC}{2} = 17$. Тогда $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}$. Площадь любого четырёхугольника равна полупровизведению диагоналей, умноженному на синус угла между ними. В силу того, что диагонали прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны диагоналям трапеции $ABCD$, угол между ними равен углу между диагоналями трапеции. Обозначим этот угол через ψ. Кроме того диагонали прямоугольника, вписанного в окружность, являются его диаметрами, поэтому $A_1C_1 = B_1D_1 = 26$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\psi = 169 \sin\psi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\psi = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 26 \sin\psi = 338 \sin\psi$. Значит, отношение площадей равно $\frac{169 \sin\psi}{338 \sin\psi} = \frac{1}{2}$.

2) Точка O лежит на отрезке MN. Тогда $MN = ON + OM = 17$. Аналогично первому случаю находим, что $BH = 17$, $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = 17\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\varphi = 289 \sin\varphi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 26 \sin\varphi = 338 \sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями трапеции. Отсюда отношение площадей есть $\frac{289 \sin\varphi}{338 \sin\varphi} = \frac{289}{338}$.

5. Есть 200 различных карточек с числами $2, 3, 2^2, 3^2, \ldots, 2^{100}, 3^{100}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

Ответ: 4389.

Решение. Чтобы получить куб натурального числа, необходимо и достаточно чтобы каждый множитель входил в разложение числа на простые множители в степени, кратной 3.

Допустим, выбраны две карточки со степенями двойки. У нас есть 33 показателя, делящиеся на 3 $(3, 6, 9, \ldots, 99)$, 34 показателя, дающие остаток 1 от деления на 3 $(1, 4, 7, \ldots, 100)$, 33 показателя, дающие остаток 2 от деления на 3 $(2, 5, 8, \ldots, 98)$. Нам нужно, чтобы сумма показателей оказалась кратна 3. Чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 3, мы можем либо выбрать два числа делящиеся на 3 $\left(C_{33}^2 = \frac{33 \cdot 32}{2} = 528 \text{ способов}\right)$, либо взять одно число, дающее остаток 1 от деления на 3, и одно число, дающее остаток 2 от деления на 3 $(34 \cdot 33 = 1122 \text{ способа})$. Получаем $528 + 1122 = 1650$ способов.

Количество способов, когда на обеих выбранных карточках написаны степени тройки, точно такое же, т.е. 1650.

Если взята одна карточка со степенью двойки и одна карточка со степенью тройки, то оба показателя должны делиться на 3 – получаем $33 \cdot 33 = 1089$ способов.

Итого: $1650 + 1650 + 1089 = 4389$ способов.

6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - x \geqslant |x+y|, \\ \frac{x^2+8x+y^2+6y}{2y-x-8} \leqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

Ответ: 8.

Решение. Первое неравенство равносильно[1] системе $\begin{cases} x+y \leqslant y-x, \\ x+y \geqslant x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$.

Рассмотрим второе неравенство. Его можно записать в виде $\frac{(x+4)^2+(y+3)^2-25}{2y-x-8} \leqslant 0$. Числитель дроби в левой части неравенства обращается в 0 на окружности радиуса 5 с центром в точке $Q(-4;-3)$ (назовём её ω). Знаменатель дроби равен нулю на прямой $y = 4 + \frac{x}{2}$ (назовём её ℓ). Точки пересечения окружности и прямой определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x^2 + 8x + y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 8, \\ (2y-8)^2 + 8(2y-8) + y^2 + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 8, \\ y^2 - 2y = 0, \end{cases}$$

откуда получаем две точки $A(-4;2)$ и $B(-8;0)$. Обозначим также начало координат через O, а точку пересечения прямой ℓ с осью Oy через C (несложно определить, что координаты точки C – это $(0;4)$).

Неравенство выполняется:

– во всех точках окружности ω кроме точек A и B (тогда числитель дроби равен нулю);

– внутри окружности ω в точках, расположенных выше прямой ℓ (числитель отрицателен, а знаменатель положителен);

– вне окружности ω в точках, расположенных ниже прямой ℓ (числитель положителен, а знаменатель отрицателен).

Опишем множество точек M, которые удовлетворяют исходной системе неравенств. Оно состоит из сегмента окружности, ограниченного хордой AB и находящегося сверху от этой хорды, а также криволинейного треугольника AOC, границами которого являются дуга AO окружности ω и отрезки AC и CO (при этом точки прямой ℓ множеству не принадлежат, а остальные точки границы – принадлежат).

Заметим, что в силу симметрии сегмент окружности, расположенный выше хорды AB, равен сегменту окружности, расположенному выше хорды AO. Значит, площадь фигуры M равна площади треугольника ACO, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

7. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 4$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 3, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = \frac{4}{3}$, $PT = \frac{\sqrt{145}}{3} - 3$, $S_{\triangle APC} = \frac{128\sqrt{5}}{87}$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому $OH = ON$.

[1] $|A| \leqslant B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B. \end{cases}$

Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому $PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = 2$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+4} = \frac{1}{4}$, $y = \frac{4}{3}$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = 9 - 4 = 5$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = \frac{100}{9} + 5 = \frac{145}{9}$. Следовательно, $PT = PO - OT = \frac{\sqrt{145}}{3} - 3$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = \sqrt{5} : \frac{\sqrt{145}}{3} = \frac{3}{\sqrt{29}}$, $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{12\sqrt{5}}{29}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} PA \cdot PC \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{3} \cdot \frac{12\sqrt{5}}{29} = \frac{128\sqrt{5}}{87}$.

Билет 12

1. Дана линейная функция $f(x)$. Известно, что расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2 - 1$ и $y = f(x) + 1$ равно $3\sqrt{10}$, а расстояние между точками пересечения графиков $y = x^2$ и $y = f(x) + 3$ равно $3\sqrt{14}$. Найдите расстояние между точками пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = f(x)$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$. Тогда абсциссы точек пересечения графиков в первом случае определяются из уравнения $x^2 - 1 = ax + b + 1$, а во втором случае – из уравнения $x^2 = ax + b + 3$.

Рассмотрим первый случай подробнее. Уравнение имеет вид $x^2 - ax - (b + 2) = 0$, откуда $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b+8}}{2}$, $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b + 8}$. Так как точки пересечения графиков лежат на прямой с угловым коэффициентом a, расстояние между точками в $\sqrt{a^2 + 1}$ раз больше, чем $|x_2 - x_1|$. Значит, расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b + 8)}$. Аналогично находим, что во втором случае расстояние между точками равно $\sqrt{(a^2 + 1)(a^2 + 4b + 12)}$. Из условия получаем систему уравнений $\begin{cases} (a^2+1)(a^2+4b+8) = 90, \\ (a^2+1)(a^2+4b+12) = 126, \end{cases}$ решая которую, находим, что $a^2 = 8$, $b = -\frac{3}{2}$.

Найдём искомое расстояние. Абсциссы точек пересечения определяются уравнением $x^2 - ax - b = 0$, поэтому $|x_2 - x_1| = \sqrt{a^2 + 4b} = \sqrt{2}$, а расстояние между самими точками пересечения есть $|x_2 - x_1|\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2}$.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt[6]{4x^2} - \sqrt[3]{x^2}}{(x^2-2|x|)^2 + 4|x| - 2x^2 - 3} \leqslant 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2] \cup (3; +\infty)$.

Решение. Рассмотрим знаменатель дроби. Его можно записать в виде $\left(x^2 - 2|x|\right)^2 - 2\left(x^2 - 2|x|\right) - 3$, или, если обозначить $x^2 - 2|x| = t$, в виде $t^2 - 2t - 3 = (t - 3)(t + 1)$. Если вернуться обратно к переменной x, выходит выражение $\left(x^2 - 2|x| - 3\right)\left(x^2 - 2|x| + 1\right) = (|x| - 3)(|x| + 1)(|x| - 1)^2$. Итак, исходное неравенство равносильно следующему

$$\frac{\sqrt[3]{2|x|} - \sqrt[3]{x^2}}{(|x| - 3)(|x| + 1)(|x| - 1)^2} \leqslant 0 \qquad (2)$$

.

В последнем неравенстве необходимо сравнить дробь с нулём, или, что то же самое, определить знак этой дроби. Это означает, что если мы заменим числитель или любой из множителей в знаменателе выражением того же знака, то получим неравенство, равносильное исходному. Заметим, что знак выражения $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ совпадает со знаком выражения $a - b$ при любых a и b; выражение $|a| - b$ при $b < 0$ положительно, а при $b > 0$ его знак совпадает со знаком выражения $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Следовательно, неравенство (2) равносильно следующему

$$\frac{2|x| - x^2}{\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 1\right)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{|x|(|x| - 2)}{\left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 1\right)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 3)(x - 1)^2(x + 1)^2} \geqslant 0.$$

Метод интервалов, применённый к последнему неравенству, даёт
$x \in (-\infty; -3) \cup [-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2] \cup (3; +\infty)$.

3. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 10 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна 20. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Ответ: $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{2}$.

Решение. Известно, что сумма первых n членов геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q равна $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $|q| < 1$, поэтому при n, стремящемся к бесконечности, q^n стремится к нулю, а сумма членов стремится к $\frac{b_1}{1-q}$.

Все члены данной прогрессии $\{b_n\}$ с нечётными номерами также образуют геометрическую прогрессию с первым членом b_1 и знаменателем q^2, а все члены с чётными номерами – геометрическую прогрессию с первым членом $b_2 = b_1 q$ и знаменателем q^2. Суммы этих членов равны соответственно $\frac{b_1}{1-q^2}$ и $\frac{b_1 q}{1-q^2}$.

Квадраты членов прогрессии на нечётных местах и на чётных местах также образуют геометрические прогрессии с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2 и с первым членом $b_2^2 = b_1^2 q^2$ и знаменателем q^4 соответственно. Их суммы равны $\frac{b_1^2}{1-q^4}$ и $\frac{b_1^2 q^2}{1-q^4}$. Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q^2} - \frac{b_1 q}{1-q^2} = 10, \\ \frac{b_1^2}{1-q^4} - \frac{b_1^2 q^2}{1-q^4} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1(1-q)}{(1-q)(1+q)} = 10, \\ \frac{b_1^2(1-q^2)}{(1-q^2)(1+q^2)} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1}{1+q} = 10, \\ \frac{b_1^2}{1+q^2} = 20. \end{cases}$$

Возводим обе части первого уравнения в квадрат, а затем делим почленно второе уравнение на первое. Получаем $\frac{1+2q+q^2}{1+q^2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 4q^2 + 10q + 4 = 0$, откуда $q = -2$ или $q = -\frac{1}{2}$. Так как прогрессия является бесконечно убывающей, $|q| < 1$, и подходит только значение $q = -\frac{1}{2}$. Тогда $b_1 = 10(1+q) = 5$.

4. В окружность Ω радиуса 17 вписаны трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) и прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ таким образом, что $AC \perp B_1D_1$, $BD \perp A_1C_1$. Найдите отношение площади $ABCD$ к площади $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AD = 30$, $BC = 16$.

Ответ: $\frac{529}{578}$ или $\frac{1}{2}$.

Решение. Проведём через центр окружности O прямую, перпендикулярную основаниям трапеции. Пусть она пересекает AD и BC в точках N и M соответственно. Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам, $BM = MC = 8$, $AN = ND = 15$. По теореме Пифагора из треугольников OND и OMC находим, что $ON = \sqrt{OD^2 - DN^2} = 8$, $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = 15$. Возможны два случая.

1) Точка O не лежит на отрезке MN. Тогда высота трапеции есть $MN = OM - ON = 7$. Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на основание AD. Так как трапеция, вписанная в окружность, равнобедренная, $AH = \frac{AD+BC}{2} = 23$. Тогда $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{578} = 17\sqrt{2}$. Площадь любого четырёхугольника равна полупровизведению диагоналей, умноженному на синус угла между ними. В силу того, что диагонали прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ перпендикулярны диагоналям трапеции $ABCD$, угол между ними равен углу между диагоналями трапеции. Обозначим этот угол через ψ. Кроме того диагонали прямоугольника, вписанного в окружность, являются его диаметрами, поэтому $A_1C_1 = B_1D_1 = 34$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\psi = 289 \sin\psi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\psi = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 34 \sin\psi = 578 \sin\psi$. Значит, отношение площадей равно $\frac{289 \sin\psi}{578 \sin\psi} = \frac{1}{2}$.

2) Точка O лежит на отрезке MN. Тогда $MN = ON + OM = 23$. Аналогично первому случаю находим, что $AH = 23$, $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = 23\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\varphi = 529 \sin\varphi$; $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1 \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 34 \sin\varphi = 578 \sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями трапеции. Отсюда отношение площадей есть $\frac{529 \sin\varphi}{578 \sin\varphi} = \frac{529}{578}$.

5. Есть 100 различных карточек с числами $2, 5, 2^2, 5^2, \ldots, 2^{50}, 5^{50}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было кубом целого числа?

Ответ: 1074.

Решение. Чтобы получить куб натурального числа, необходимо и достаточно чтобы каждый множитель входил в разложение числа на простые множители в степени, кратной 3.

Допустим, выбраны две карточки со степенями двойки. У нас есть 16 показателей, делящиеся на 3 $(3, 6, 9, \ldots, 48)$, 17 показателей, дающих остаток 1 от деления на 3 $(1, 4, 7, \ldots, 49)$, 17 показателей, дающих остаток 2 от деления на 3 $(2, 5, 8, \ldots, 50)$. Нам нужно, чтобы сумма показателей оказалась кратна 3. Чтобы сумма двух натуральных чисел делилась на 3, мы можем либо выбрать два числа делящиеся на 3 $\left(C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120 \text{ способов}\right)$, либо взять одно число, дающее остаток 1 от деления на 3, и одно число, дающее остаток 2 от деления на 3 $(17 \cdot 17 = 289 \text{ способов})$. Получаем $120 + 289 = 409$ способов.

Количество способов, когда на обеих выбранных карточках написаны степени пятёрки, точно такое же, т.е. 409.

Если взята одна карточка со степенью двойки и одна карточка со степенью пятёрки, то оба показателя должны делиться на 3 – получаем $16 \cdot 16 = 256$ способов.

Итого: $409 + 409 + 256 = 1074$ способа.

6. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x + y + |x - y| \leqslant 0, \\ \frac{x^2+6x+y^2-8y}{x+3y+6} \geqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите её площадь.

Ответ: 3.

Решение. Первое неравенство равносильно[2] системе $\begin{cases} x - y \leqslant -x - , \\ x - y \geqslant x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$.

Рассмотрим второе неравенство. Его можно записать в виде $\frac{(x+3)^2+(y-4)^2-25}{x+3y+6} \geqslant 0$. Числитель дроби в левой части неравенства обращается в 0 на окружности радиуса 5 с центром в точке $Q(-3; 4)$ (назовём её ω). Знаменатель дроби равен нулю на прямой $y = -2 - \frac{x}{3}$ (назовём её ℓ). Точки пересечения окружности и прямой определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} x = -3y - 6, \\ x^2 + 6x + y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 6, \\ (3y + 6)^2 - 6(3y + 6) + y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - 6, \\ y^2 + y = 0, \end{cases}$$

откуда получаем две точки $A(-3; -1)$ и $B(-6; 0)$. Обозначим также начало координат через O, а точку пересечения прямой ℓ с осью Oy через C (несложно определить, что координаты точки C – это $(0; -2)$).

Неравенство выполняется:

– во всех точках окружности ω кроме точек A и B (тогда числитель дроби равен нулю);

– внутри окружности ω в точках, расположенных ниже прямой ℓ (числитель и знаменатель отрицательны);

– вне окружности ω в точках, расположенных выше прямой ℓ (числитель и знаменатель положительны).

Опишем множество точек M, которые удовлетворяют исходной системе неравенств. Оно состоит из сегмента окружности, ограниченного хордой AB и находящегося снизу от этой хорды, а также криволинейного треугольника AOC, границами которого являются дуга AO окружности ω и отрезки AC и CO (при этом точки прямой ℓ множеству не принадлежат, а остальные точки границы – принадлежат).

Заметим, что в силу симметрии сегмент окружности, расположенный ниже хорды AB, равен сегменту окружности, расположенному ниже хорды AO. Значит, площадь фигуры M равна площади треугольника ACO, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.

7. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 6. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 1 : 2$.

а) Найдите AP.

б) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 4. Пусть T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

Ответ: $AP = 6$, $PT = 2\sqrt{22} - 4$, $S_{\triangle APC} = \frac{81\sqrt{7}}{11}$.

Решение. а) Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до них равны, поэтому $OH = ON$. Прямоугольные треугольники OPN и OPH равны по катету и гипотенузе (OP – общая), поэтому

[2] $|A| \leqslant B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leqslant B, \\ A \geqslant -B. \end{cases}$

$PN = PH$, $\angle OPN = \angle OPH$ (последнее означает, что PO – биссектриса угла BPC). Так как диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, точки H и N являются серединами CD и AB соответственно, поэтому $AN = HD = 3$; отсюда следует, что $AP = DP$. Пусть $AP = DP = y$. Так как PL – биссектриса треугольника APC, $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, откуда $\frac{y}{y+6} = \frac{1}{2}$, $y = 6$.

б) Треугольники OPA и OPD равны по двум сторонам и углу между ними (PO – общая, $AP = DP$, $\angle APO = \angle DPO$), поэтому $\angle AOP = \angle DOP$. Это означает, что отрезок OP делит дугу AD пополам. Обозначим точку пересечения отрезка OP с окружностью через J. Тогда CJ – биссектриса угла ACD (углы ACJ и DCJ – вписанные, опираются на равные дуги). Кроме того, PJ – биссектриса угла APC, поэтому J – точка пересечения биссектрис треугольника APC, т.е. центр его вписанной окружности. Таким образом, точки J и T совпадают.

По теореме Пифагора для треугольника DHO получаем $OH^2 = OD^2 - DH^2 = 16 - 9 = 7$. По теореме Пифагора для треугольника PHO: $PO^2 = PH^2 + OH^2 = 9^2 + 7 = 88$. Следовательно, $PT = PO - OT = \sqrt{88} - 4$.

Пусть $\angle CPO = \beta$. Тогда $\sin\beta = \frac{OH}{OP} = \sqrt{7} : \sqrt{88} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{22}}$, $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \frac{9}{2\sqrt{22}}$, $\sin 2\beta = 2\cos\beta\sin\beta = \frac{9\sqrt{7}}{44}$, $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} PA \cdot PC \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 \cdot \frac{9\sqrt{7}}{44} = \frac{81\sqrt{7}}{11}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(4 балла)** Выведена формула для расстояния между точками пересечения прямой и параболы 1 балл;

   получена система уравнений относительно неизвестных коэффициентов .... 1 балл;

   найдены неизвестные коэффициенты .... 1 балл;

   при решении системы потеряно одно из значений углового коэффициента прямой снять 1 балл;

   вместо расстояния между точками рассматривается расстояние между проекциями точек на ось абсцисс .... 0 баллов за задачу.

2. **(5 баллов)** потерян модуль при переходе от корня шестой степени к кубическому корню *ИЛИ* при раскрытии модуля по определению не учитываются условия $x \geqslant 0$ $(x < 0)$ .... не более 1 балла за задачу (который может быть получен за разложение знаменателя на множители);

   если используется метод знакоэквивалентных множителей, то за переход к рациональному неравенству .... 3 балла;

   знаменатель разложен на линейные множители относительно $|x|$, а других продвижений нет 1 балл за задачу;

   ответ отличается от верного конечным числом точек .... снять 1 балл

   неэквивалентное преобразование неравенства не более 1 балла за задачу (который может быть получен за разложение знаменателя на множители).

3. **(5 баллов)** Составлена система уравнений относительно первого члена прогрессии и её знаменателя .... 2 балла;

   не обосновано, что знаменатель прогрессии отличен от единицы .... баллы не снимать;

   в ответ включено значение знаменателя, модуль которого больше единицы ..... снять 2 балла.

4. **(5 баллов)** Полностью рассмотрен только один из двух возможных случаев .... 3 балла;

   промежуточные оценки в случае отсутствия полного решения (ставятся только один раз, даже если вычисления проведены верно в обоих случаях):

   – найдена площадь трапеции .... 1 балл;

   – найден угол между диагоналями прямоугольника .... 1 балл.

5. **(5 баллов)** Найдено количество способов, когда на карточках степени разных простых чисел 2 балла;

   найдено количество способов, когда на карточках степени одного простого числа ..... 3 балла;

   неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев, учтены не все случаи или некоторые наборы учтены более одного раза .... не более 3 баллов за задачу;

   если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 2 раза больше указанного в решении) .... баллы не снимаются;

ответ не приведён к числовому . . . . баллы не снимать;

если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт (например, вместо $\frac{n(n+1)}{2}$ берётся $n(n+1)$ . . . . 0 баллов за рассматриваемый случай.

6. **(6 баллов)** Построено множество точек . . . . 4 балла;

   если при этом неверно учтена граница множества (т.е. либо не исключены участки границы, на которых знаменатель обращается в 0, либо исключены участки границы, в которых числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, либо невозможно понять, какие из границ принадлежат множеству) . . . . снять 1 балл;

   найдена площадь фигуры . . . . 2 балла (эти баллы ставятся только в том случае, если множество точек построено верно или отличается от верного лишь некоторым количеством граничных точек).

   За неполное построение множества возможны частичные баллы:

   определено множество решений первого неравенства . . . . 1 балл;

   построены множества точек, в которых числитель и знаменатель дроби второго неравенства обращаются в ноль . . . . 1 балл;

   определены области плоскости, удовлетворяющие второму неравенству . . . . . 1 балл (этот балл суммируется с предыдущим).

7. **(6 баллов)** а) (2 балла) Доказано, что треугольник BCP равнобедренный и что PL – биссектриса угла APC . . . . 1 балл;

   б) (4 балла) найден отрезок PT . . . . 2 балла;

   найдена площадь треугольника ACP . . . . 2 балла.