ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «ФИЗТЕХ-2007»

1. Решить уравнение

$$2\log_3(x^2-4)+3\sqrt{\log_3(x+2)^2}-\log_3(x-2)^2=4\,.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 9x-2\cos 6x+1}{\cos 3x-1}=|\cos 3x|\,.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{(\sqrt{x+3}+x-3)(\sqrt{4x+5}+x-4)}{\sqrt{4+4x-x^2-x^3}}\leq 0\,.$$

4. Окружность ω с центром в точке O на стороне AC треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $AD=2CE$, а угол DOE равен $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$. Найти углы треугольника ABC и отношение его площади к площади круга, ограниченного окружностью ω.

5. Найти все значения параметра a, при которых существует ровно две пары действительных чисел $(x;y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \left(x+y^2-1\right)\left(y-\sqrt{6}|x|\right)=0, \\ 2ay+x=1+a^2. \end{cases}$$

6. Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два шара ω_1 и ω_2, касающиеся друг друга внешним образом; кроме того шар ω_1 касается граней $ABCD$, ABB_1A_1, ADD_1A_1, а шар ω_2 касается граней $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1, CDD_1C_1. Известно, что $AB=6-\sqrt{2}$, $A_1D_1=6+\sqrt{2}$, $CC_1=6$. Найти расстояние между центрами шаров ω_1 и ω_2. Найти наибольший и наименьший суммарный объем шаров.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «ФИЗТЕХ-2007»

1. Решить уравнение

$$2\log_3(x^2-4)+3\sqrt{\log_3(x+2)^2}-\log_3(x-2)^2=4\,.$$

Ответ: $-2-\sqrt{3}$.

Решение: Преобразуем уравнение к виду

$$\log_3(x+2)^2+3\sqrt{\log_3(x+2)^2}=4.$$

Пусть $t=\sqrt{\log_3(x+2)^2}\geq 0$. Тогда $t^2+3t-4=(t-1)(t+4)=0$. Следовательно, $t=1$ и $(x+2)^2=3$. Получаем $x=-2\pm\sqrt{3}$, причем $x=-2+\sqrt{3}$ не является решением, так как $x^2-4=(\sqrt{3}-4)\sqrt{3}<0$ и $\log_3(x^2-4)$ не определен, а $x=-2-\sqrt{3}$ – решение.

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 9x-2\cos 6x+1}{\cos 3x-1}=|\cos 3x|\,.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}$.

Решение: Пусть $\cos 3x=t$. Тогда $\frac{4t^3-3t-2(2t^2-1)+1}{t-1}=|t|$, т. е. $\frac{4t^3-4t^2-3t+3}{t-1}=|t|$. Так как $4t^3-4t^2-3t+3=(t-1)(4t^2-3)$, то $4t^2-3=|t|$, $t\neq 1$. При $t\geq 0$ имеем $4t^2-t-3=0$, т. е. $t_1=1$ – не подходит, и $t_2=-\frac{3}{4}<0$ – не подходит. При $t<0$ имеем $4t^2+t-3=0$, т. е. $t_1=-1$ и $t_2=\frac{3}{4}$ – не подходит. Итак, $\cos 3x=-1$, т. е. $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}$ – решения.

3. Решить неравенство

$$\frac{(\sqrt{x+3}+x-3)(\sqrt{4x+5}+x-4)}{\sqrt{4+4x-x^2-x^3}}\leq 0\,.$$

Ответ: $x=1$.

Решение: Пусть $f(x)=\sqrt{x+3}+x-3$. Уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение $x=1$, $f(x)<0$ при $x\in[-3,1)$ и $f(x)>0$ при $x>1$. Далее, пусть $g(x)=\sqrt{4x+5}+x-4$. Уравнение $g(x)=0$ имеет единственное решение $x=1$,

$g(x) < 0$ при $x \in \left[-\frac{5}{4}, 1\right)$ и $g(x) > 0$ при $x > 1$. Следовательно, $f(x)g(x) \leq 0$ только при $x = 1$. Пусть $h(x) = 4 + 4x - x^2 - x^3$. Так как $h(1) = 6 > 0$, то $x = 1$ – единственное решение неравенства.

4. Окружность ω с центром в точке O на стороне AC треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках D и E соответственно. Известно, что $AD = 2\,CE$, а угол DOE равен $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$. Найти углы треугольника ABC и отношение его площади к площади круга, ограниченного окружностью ω.

Ответ: $\angle ABC = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$, $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$, $\angle BAC = \operatorname{arcctg} 2$, $\frac{2\sqrt{10}+7}{6\pi}$.

Решение: Обозначим $\angle DOE = \varphi$, $\angle BAC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Так как $\angle ODB = \angle OEB = \frac{\pi}{2}$, то $\angle ABC = \pi - \varphi = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$. Из прямоугольных $\triangle ADO$ и $\triangle OEC$ находим $AD = DO\operatorname{ctg}\beta$ и $EC = OE\operatorname{ctg}\gamma$. Так как $\frac{AD}{EC} = 2$ и $DO = OE = R$ — радиус окружности ω, то $\operatorname{ctg}\beta = 2\operatorname{ctg}\gamma$. Так как $\beta + \gamma = \varphi$, то получаем $2\operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}(\varphi - \gamma) = \frac{\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\gamma + 1}{\operatorname{ctg}\gamma - \frac{1}{3}}$, т. е. $2\operatorname{ctg}^2\gamma - \operatorname{ctg}\gamma - 1 = 0$. Так как угол γ острый как угол прямоугольного $\triangle OEC$, то $\operatorname{ctg}\gamma = 1$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \operatorname{arcctg} 2$. Из равнобедренных $\triangle ODE$ и $\triangle BDE$ находим $\frac{DE}{2} = R\sin\frac{\varphi}{2} = BD\cos\frac{\varphi}{2}$. Отсюда $BD = BE = R\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. Так как $3 = \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$, то $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{10}-1}{3}$. Тогда площадь $\triangle ABC$ равна $S = \frac{1}{2}\left(R\operatorname{ctg}\beta + R\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\left(R\operatorname{ctg}\gamma + R\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi$, и искомое отношение равно $\frac{S}{\pi R^2} = \frac{1}{2\pi}\left(2 + \frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}+7}{6\pi}$.

5. Найти все значения параметра a, при которых существует ровно две пары действительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \left(x + y^2 - 1\right)\left(y - \sqrt{6}|x|\right) = 0, \\ 2ay + x = 1 + a^2. \end{cases}$$

Ответ: $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $a \in \left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{2\sqrt{6}}\right]$.

Решение: На координатной плоскости Oxy рассмотрим ломаную L, задаваемую уравнением $y = \sqrt{6}|x|$, и параболу Π, задаваемую уравнением $x + y^2 = 1$. Ломаная L пересекается с параболой Π в точках с абсциссами $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{3}$ и положительными ординатами. Прямая $\ell(a)$, задаваемая уравнением $2ay + x = 1 + a^2$, касается параболы Π в точке $(1 - a^2; a)$. Найдем $a > 0$, при которых точка касания $\ell(a)$ и Π является точкой пересечения L и Π. Имеем: $1 - a^2 = -\frac{1}{2}$

при $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и $1 - a^2 = \frac{1}{3}$ при $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$. При $a > \sqrt{\frac{3}{2}}$ или $a \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,;\, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ прямая $\ell(a)$ пересекает ломаную L в двух различных точках, не лежащих на Π. Следовательно, в этом случае система имеет ровно три решения. При $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ прямая $\ell(a)$ пересекает L в двух различных точках, одна из которых является точкой касания $\ell(a)$ и Π. Следовательно, в этом случае система имеет ровно два решения. Ищем $a_1 \in \left(0\,;\, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, при котором $\ell(a_1)$ параллельна прямой, задаваемой уравнением $y = -\sqrt{6}x$. Имеем: $-2a_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, т. е. $a_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}$. Ищем $a_0 < 0$ при котором $\ell(a_0)$ параллельна прямой, задаваемой уравнением $y = \sqrt{6}x$. Имеем: $-2a_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, т. е. $a_0 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$. При $a \in \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\,;\, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ прямая $\ell(a)$ пересекает ломаную L в двух различных точках, не лежащих на Π. Следовательно, в этом случае система имеет ровно три решения. При $a \in \left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}\,;\, \frac{1}{2\sqrt{6}}\right]$ прямая $\ell(a)$ пересекает L в одной точке, не лежащей на Π. Следовательно, в этом случае система имеет ровно два решения. При $a \leq -\frac{1}{2\sqrt{6}}$ прямая $\ell(a)$ не пересекается с L. Следовательно, в этом случае система имеет ровно одно решение.

6. Внутри прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены два шара ω_1 и ω_2, касающиеся друг друга внешним образом; кроме того шар ω_1 касается граней $ABCD$, ABB_1A_1, ADD_1A_1, а шар ω_2 касается граней $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1, CDD_1C_1. Известно, что $AB = 6 - \sqrt{2}$, $A_1D_1 = 6 + \sqrt{2}$, $CC_1 = 6$. Найти расстояние между центрами шаров ω_1 и ω_2. Найти наибольший и наименьший суммарный объем шаров.

Ответ: $\quad d = 4\,; \quad V_{max} = (\frac{136}{3} - 16\sqrt{2})\pi\,; \quad V_{min} = \frac{64\pi}{3}$.

Решение. Пусть r_1, r_2 — радиусы шаров, без ограничения общности $r_1 \leq r_2$; $a = 6 - \sqrt{2}$, $b = 6$, $c = 6 + \sqrt{2}$ — длины ребер параллелепипеда, $a < b < c$. Введем прямоугольную систему координат с центром в точке A и осями Ox, Oy, Oz, направленными соответственно вдоль лучей AB, AA_1, AD. Координаты центров шаров имеют вид (r_1, r_1, r_1) и $(a - r_2, b - r_2, c - r_2)$. Условие касания: $(r_1 + r_2 - a)^2 + (r_1 + r_2 - b)^2 + (r_1 + r_2 - c)^2 = (r_1 + r_2)^2$. Положив $t = r_1 + r_2$, преобразуем равенство к виду $2t^2 - 2(a + b + c)t + (a^2 + b^2 + c^2) = 0$, т. е.

$$t^2 - 18t + 56 = 0. \tag{1}$$

Условие принадлежности шаров параллелепипеду запишется как

$$0 < r_1, r_2 \le \frac{a}{2} = \frac{6-\sqrt{2}}{2}. \tag{2}$$

Отметим, что при выполнении условий (1), (2) можно вписать шары радиуса r_1 и r_2 в трехгранные углы при вершинах A и C_1, и условия задачи будут выполняться. Из (1) получаем $t = 4$ или $t = 14$. Из (2) следует, что $t = r_1 + r_2 \le$ $\le a = 6 - \sqrt{2}$, отсюда $t = 4$. Сумма объемов шаров равна

$$V = \frac{4\pi}{3}(r_1^3 + r_2^3) = \frac{\pi}{3}(r_1 + r_2)\left((r_1+r_2)^2 + 3(r_2 - r_1)^2\right) = \frac{\pi t}{3}\left(t^2 + 3(2r_2 - t)^2\right).$$

Отсюда $V \ge \frac{\pi t^3}{3} = \frac{64\pi}{3}$, и равенство достигается при $r_1 = r_2 = 2$;

$$V \le \frac{\pi t}{3}\left(t^2 + 3(a-t)^2\right) = \frac{4\pi}{3}\left(4^2 + 3(2-\sqrt{2})^2\right) = \left(\frac{136}{3} - 16\sqrt{2}\right)\pi,$$

и равенство достигается при $r_2 = \frac{a}{2} = 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r_1 = t - r_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.