РЕШЕНИЕ БИЛЕТА III (ДОЛГОПРУДНЫЙ)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2y} &= 3y-x, \\ \frac{81}{4}y^2+x^3 &= 2x+1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1\,,\,0)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\,0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{113}-9}{2}\,,\,\frac{3\sqrt{113}-29}{9}\right)$.

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{ctg} x-2)+\log_{(\operatorname{ctg} x-2)}\sqrt{\operatorname{tg} x}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{10-2|x|}{|x^2+9x+11|-3}\leq 1.$$

Ответ: $(-\infty,-8)\cup(-7,-3]\cup(-2,-1)\cup\left[\frac{\sqrt{129}-11}{2},+\infty\right)$.

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $\frac{1}{4}$ с центром на отрезке CD проходит через точку D и касается отрезка BC в точке E такой, что угол BED равен $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Найдите высоту параллелограмма DF и длину отрезка CD. Найдите площадь параллелограмма, если $AB=BE$.

Ответ: $DF=\frac{8}{25}$, $CD=\frac{24}{21}$, $S=\frac{16}{25}$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение

$$x^2+(\sin\alpha+3\cos\alpha)x+b=0$$

имеет действительное решение.

Ответ: $b\leq\frac{5}{2}$.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром O на прямой SA касается рёбер SB, SC и BC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей BSC и ABC, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O,BSC)=\frac{2}{7}\sqrt{\frac{33}{5}}$, $\rho(O,ABC)=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{11}{3}}$, $R=\frac{3\sqrt{15}}{14}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА И (ДОЛГОПРУДНЫЙ)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}y} & = & y - x, \\ \\ \frac{9}{4}y^2 + x^3 & = & 2x + 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-1\,,\,0)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\,0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{113}-9}{2}\,,\,\frac{3\sqrt{113}-29}{3}\right)$.

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x}(2 - \operatorname{ctg} x) + 2\log_{(2-\operatorname{ctg} x)}\sqrt{\operatorname{tg} x} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{20 - 4|x|}{|x^2 + 11x + 21| - 3} \leq 1.$$

Ответ: $(-\infty, -9) \cup (-8, -4] \cup (-3, -2) \cup \left[\frac{\sqrt{233}-15}{2}, +\infty\right)$.

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса 1 с центром на отрезке BC проходит через точку C и касается отрезка AB в точке E такой, что угол AEC равен $\operatorname{arctg} 2$. Найдите высоту параллелограмма CF и длину отрезка BC. Найдите площадь параллелограмма, если $AD = AE$.

Ответ: $CF = \frac{8}{5}$, $BC = \frac{8}{3}$, $S = \frac{32}{5}$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение

$$x^2 + (2\sin\alpha - \cos\alpha)x - b = 0$$

имеет действительное решение.

Ответ: $b \geq -\frac{5}{4}$.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 2, боковое ребро равно 3. Сфера с центром O на прямой SB касается рёбер SA, SC и AC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ASC и ABC, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O, ASC) = \frac{3}{7}\sqrt{\frac{23}{2}}$, $\rho(O, ABC) = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{23}{3}}$, $R = \frac{8\sqrt{2}}{7}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Ф (ДОЛГОПРУДНЫЙ)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2-2x} & = & 3x-y, \\ \frac{81}{4}x^2+y^3 & = & 2y+1. \end{cases}$$

Ответ: $(0\,,\,-1)$, $\left(0\,,\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{113}-29}{9}\,,\,\frac{\sqrt{113}-9}{2}\right)$.

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{tg} x-2)+\log_{(\operatorname{tg} x-2)}\sqrt{\operatorname{ctg} x}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{8-2|x|}{|x^2+7x+3|-3}\leq 1.$$

Ответ: $(-\infty,-7)\cup(-6,-2]\cup(-1,0)\cup\left[\frac{\sqrt{113}-9}{2},+\infty\right)$.

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром на отрезке AB проходит через точку B и касается отрезка AD в точке E такой, что угол BED равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. Найдите высоту параллелограмма BF и длину отрезка AB. Найдите площадь параллелограмма, если $CD=DE$.

Ответ: $BF=\frac{9}{13}$, $AB=\frac{9}{5}$, $S=\frac{27}{13}$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение

$$x^2+(\cos\alpha-4\sin\alpha)x+b=0$$

имеет действительное решение.

Ответ: $b\leq\frac{17}{4}$.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 1, боковое ребро равно 3. Сфера с центром O на прямой SA касается рёбер SB, SC и BC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей BSC и ABC, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O,BSC)=\frac{3}{17}\sqrt{\frac{130}{7}}$, $\rho(O,ABC)=\frac{2}{17}\sqrt{\frac{26}{3}}$, $R=\frac{5\sqrt{35}}{34}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Р (ДОЛГОПРУДНЫЙ)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - \frac{2}{3}x} & = & x - y, \\ \\ \frac{9}{4}x^2 + y^3 & = & 2y + 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0\,,\,-1)$, $\left(0\,,\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{3\sqrt{113}-29}{3}\,,\,\frac{\sqrt{113}-9}{2}\right)$.

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg} x}(2 - \operatorname{tg} x) + 2\log_{(2-\operatorname{tg} x)}\sqrt{\operatorname{ctg} x} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{6 - 2|x|}{|x^2 + 5x - 3| - 3} \leq 1.$$

Ответ: $(-\infty, -6) \cup (-5, -1] \cup (0, 1) \cup \left[\frac{\sqrt{97}-7}{2}, +\infty\right)$.

4. В параллелограмме $ABCD$ окружность радиуса 2 с центром на отрезке AD проходит через точку A и касается отрезка CD в точке E такой, что угол AEC равен $\operatorname{arctg} 3$. Найдите высоту параллелограмма AF и длину отрезка AD. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = CE$.

Ответ: $AF = \frac{18}{5}$, $AD = \frac{9}{2}$, $S = \frac{108}{5}$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых существует число α, такое, что уравнение

$$x^2 + (3\cos\alpha + 2\sin\alpha)x - b = 0$$

имеет действительное решение.

Ответ: $b \geq -\frac{13}{4}$.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна 2, боковое ребро равно 5. Сфера с центром O на прямой SC касается рёбер SA, SB и AB. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ASB и ABC, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O, ASB) = \frac{5}{23}\sqrt{\frac{142}{3}}$, $\rho(O, ABC) = \frac{\sqrt{213}}{23}$, $R = \frac{16\sqrt{6}}{23}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Ш (ВЫЕЗД)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - \frac{2x}{y}} & = & x - y, \\ x^2 + \frac{2}{y^2} & = & y^2 + 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0\,, -1)$, $\quad \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\quad \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{(x-1)}\left(\frac{5}{2} - x\right)} \leq 1.$$

Ответ: $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{7}}{2}, 2\right) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{8 \operatorname{tg} x + 22 \operatorname{ctg} x} = -\sqrt{15}\,(\sin x + \cos x)\,.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \quad \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

4. В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{3}$ с центром на отрезке BC проходит через точку B и касается отрезка AC в точке D такой, что угол ADB равен $\operatorname{arctg} \frac{3}{2}$. Найдите высоту BF треугольника ABC и длину отрезка CD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AB и CD равны.

Ответ: $BF = 6, \quad CD = \frac{52}{5}, \quad S = \frac{6}{5}\left(36 + \sqrt{451}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y & = & \left|b - x^2\right|, \\ y & = & a(x - b) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a.

Ответ: $b \in [0, 1]$.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром O на плоскости CDS касается рёбер SA, SB и AB. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и ADS, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O, ABC) = \frac{1}{13}\sqrt{\frac{7}{2}}, \quad \rho(O, ADS) = \frac{2}{13}\sqrt{\frac{42}{5}}, \quad R = \frac{3\sqrt{71}}{26}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА И (ВЫЕЗД)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4y^2 + \frac{x}{y}} & = & -x - 2y, \\ x^2 + \frac{1}{2y^2} & = & 4y^2 + 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0\,,\,-\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\sqrt{2}\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\sqrt{2}\,,\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{\left(x-\frac{5}{8}\right)}(2-x)} \le 1.$$

Ответ: $\left(\frac{5}{8}, 1\right) \cup \left[\frac{1}{8} + \sqrt{\frac{13}{8}}, \frac{13}{8}\right) \cup \left(\frac{13}{8}, 2\right)$.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4\operatorname{tg} x - 14\operatorname{ctg} x} = \sqrt{5}\left(\sin x - \cos x\right).$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad \operatorname{arctg} 2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

4. В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{2\sqrt{3}}$ с центром на отрезке AB проходит через точку A и касается отрезка BC в точке D такой, что угол ADC равен $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$. Найдите высоту AF треугольника ABC и длину отрезка BD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AC и BD равны.

Ответ: $AF = 3\sqrt{3}, \quad BD = \frac{26\sqrt{3}}{5}, \quad S = \frac{9}{10}\left(36 + \sqrt{451}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x & = & \left|b + y^2\right|, \\ y & = & a\left(x - b^2\right) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a.

Ответ: $b \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, боковое ребро равно 3. Сфера с центром O на плоскости ADS касается рёбер SB, SC и BC. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и ABS, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O, ABC) = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{17}{2}}, \quad \rho(O, ABS) = \frac{1}{11}\sqrt{\frac{170}{7}}, \quad R = \frac{5\sqrt{19}}{22}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Φ (ВЫЕЗД)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - \frac{32x}{y}} & = & 4x - y, \\ 4x^2 + \frac{8}{y^2} & = & \frac{y^2}{4} + 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0\,,\,-2)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,2\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,-2\sqrt{2}\right)$.

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{\left(x+\frac{1}{4}\right)}(1-x)} \le 1.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{4},0\right) \cup \left[-\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4},1\right)$.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{7\operatorname{tg} x + 33\operatorname{ctg} x} = 2\sqrt{5}\left(\sin x + \cos x\right).$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\quad \operatorname{arctg} 3 + 2\pi k$, $\quad k \in \mathbb{Z}$.

4. В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{2}$ с центром на отрезке AC проходит через точку C и касается отрезка AB в точке D такой, что угол BDC равен $\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$. Найдите высоту CF треугольника ABC и длину отрезка AD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AD и BC равны.

Ответ: $CF = 9$, $\quad AD = \frac{78}{5}$, $\quad S = \frac{27}{10}\left(36 + \sqrt{451}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y & = & -\left|b + x^2\right|, \\ y & = & a(x+b) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a.

Ответ: $b \in [-1, 0]$.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 2, боковое ребро равно 5. Сфера с центром O на плоскости ABS касается рёбер SC, SD и CD. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и BCS, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O, ABC) = \frac{\sqrt{23}}{11}$, $\quad \rho(O, BCS) = \frac{5}{11}\sqrt{\frac{23}{6}}$, $\quad R = \frac{4\sqrt{29}}{11}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА P (ВЫЕЗД)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 + \frac{x}{2y}} &= -x - y, \\ 4x^2 + \frac{1}{2y^2} &= 4y^2 + 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0\,,\,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{\left(x+\frac{5}{8}\right)}\left(\frac{1}{2} - x\right)} \le 1.$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{9}{8} + \sqrt{\frac{11}{8}}, \frac{3}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2\operatorname{tg} x - 12\operatorname{ctg} x} = \sqrt{5}\left(\cos x - \sin x\right).$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $\quad \operatorname{arctg} 3 + \pi + 2\pi k$, $\quad k \in \mathbb{Z}$.

4. В треугольнике ABC окружность радиуса $\frac{13}{3\sqrt{3}}$ с центром на отрезке AC проходит через точку A и касается отрезка BC в точке D такой, что угол ADB равен $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$. Найдите высоту AF треугольника ABC и длину отрезка CD. Найдите площадь треугольника ABC, если длины отрезков AB и CD равны.

Ответ: $AF = 2\sqrt{3}$, $\quad CD = \frac{52}{5\sqrt{3}}$, $\quad S = \frac{2}{5}\left(36 + \sqrt{451}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x &= -\left|b - y^2\right|, \\ y &= a\left(x + b^2\right) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a.

Ответ: $b \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, боковое ребро равно 4. Сфера с центром O на плоскости BCS касается рёбер SA, SD и AD. Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей ABC и CDS, а также радиус сферы.

Ответ: $\rho(O, ABC) = \frac{5}{61}\sqrt{\frac{31}{2}}$, $\quad \rho(O, CDS) = \frac{4\sqrt{434}}{183}$, $\quad R = \frac{7\sqrt{311}}{122}$.