

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{4} + 11x + 23$.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x+1}} \geq 1 + \sqrt{x+1}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a|x-1| + \frac{x^2 - 7x + 12}{3-x} = 0$$

имеет ровно одно решение.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x+2y} - 2y = \frac{7}{2}, \\ x^2 + x + 2y - 4y^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

6. Точка K лежит на стороне AB треугольника ABC с углом 120° при вершине C . В треугольники AKC и BKC вписаны окружности с центрами O и Q соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OQC , если $OK = 6$, $KQ = 7$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{4} + 3x + \frac{253}{4}$.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x} - 2}{1 - \sqrt{3-x}} \geq 1 + \sqrt{3-x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a|x+1| + \frac{x^2 - 5x + 6}{2-x} = 0$$

имеет ровно одно решение.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \sqrt{y-3x} + 3x = 12, \\ y^2 + y - 3x - 9x^2 = 144. \end{cases}$$

6. Точка P лежит на стороне BC треугольника ABC с углом 60° при вершине A . В треугольники APB и APC вписаны окружности с центрами D и T соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADT , если $PD=7$, $PT=4$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{4} + 9x + 19$.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x} - 6}{2 - \sqrt{x+4}} \geq 2 + \sqrt{x+4}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a|2-x| + \frac{x^2 - x - 6}{3-x} = 0$$

имеет ровно одно решение.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{2x+3y} - 3y = 5, \\ 4x^2 + 2x + 3y - 9y^2 = 32. \end{cases}$$

6. Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 120° при вершине K . В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника FKO , если $AO = 2$, $AF = 7$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{4} + 5x + 39$.

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1-x}-12}{1-\sqrt{2-x}} \geq 1 + \sqrt{2-x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a|2+x| + \frac{x^2+x-12}{x+4} = 0$$

имеет ровно одно решение.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{3x-y} + y = 6, \\ 9x^2 + 3x - y - y^2 = 36. \end{cases}$$

6. Точка N лежит на стороне DE треугольника CDE с углом 60° при вершине C . В треугольники CNE и CDE вписаны окружности с центрами K и P соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CKP , если $KN = 8$, $NP = 7$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 13

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 13x + 42$.
2. Найдите значение выражения $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, где a и b – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 - 7x^2 + 7x = 1$.
3. В числе 2016***02** нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?
4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе
$$\begin{cases} (x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 \leq 4, \\ y + 2x \leq 0 \end{cases}$$
и найдите площадь полученной фигуры.
5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = 0, \\ 3x^2y^2 + y^4 = 84. \end{cases}$$
6. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и T соответственно, причём $AK : KB = 3 : 2$, $BT : TC = 1 : 2$. Найдите AC , если $KT = \sqrt{6}$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 14

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 7x + 54$.
2. Найдите значение выражения $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$, где p и q – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 + 6x^2 + 6x = -1$.
3. В числе 2016***02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?
4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе
$$\begin{cases} (|x| - x)^2 + (|y| - y)^2 \leq 16, \\ 2y + x \leq 0 \end{cases}$$
 и найдите площадь полученной фигуры.
5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} x - 3\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 6 = 0, \\ x^2 y^2 + x^4 = 82. \end{cases}$$
6. Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает его стороны AC и BC в точках Q и N соответственно, причём $AQ:QC = 5:2$, $CN:NB = 5:2$. Найдите AB , если $QN = 5\sqrt{2}$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 15

ШИФР _____
заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 5x + 72$.
2. Найдите значение выражения $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, где a и b – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 - 9x^2 + 9x = 1$.
3. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?
4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе
$$\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| + y)^2 \leq 4, \\ 3y + x \leq 0 \end{cases}$$
и найдите площадь полученной фигуры.
5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} 2x - \sqrt{xy} - 4\sqrt{\frac{x}{y}} + 2 = 0, \\ 2x^2 + x^2y^4 = 18y^2. \end{cases}$$
6. Окружность проходит через вершины A и K треугольника AKT и пересекает его стороны AT и KT в точках C и N соответственно, причём $AC:CT = 4:1$, $TN:NK = 1:2$. Найдите AK , если $CN = \sqrt{10}$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 16

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 20x + 63$.
2. Найдите значение выражения $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$, где p и q – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 - 8x^2 + 8x = 1$.
3. В числе 2016***02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?
4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе
$$\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| - y)^2 \leq 16, \\ y - 3x \leq 0 \end{cases}$$
и найдите площадь полученной фигуры.
5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} 3y - \sqrt{\frac{y}{x}} - 6\sqrt{xy} + 2 = 0, \\ x^2 + 81x^2y^4 = 2y^2. \end{cases}$$
6. Окружность проходит через вершины K и P треугольника KPM и пересекает его стороны KM и PM в точках F и B соответственно, причём $KF : FM = 3 : 1$, $PB : BM = 6 : 5$. Найдите KP , если $BF = \sqrt{15}$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 25

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{9} + 50$.

2. Решите неравенство

$$8|x - \sqrt{x} + 2| + 2x\sqrt{x} < x^2 + x + 28.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины A и N треугольника ACN и пересекает его стороны AC и CN соответственно в точках B и K , отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BCK к площади треугольника ACN равно $\frac{1}{4}$.

а) Найдите отношение $AN : BK$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BCN и ACK равно $\frac{9}{16}$. Найдите отношение $NK : AB$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 26

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 70$.

2. Решите неравенство

$$4x^2 + x + 9 > 2|4x - 2\sqrt{x} + 3| + 4x\sqrt{x}.$$

3. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 02 *$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|3x| + |4y| + |48 - 3x - 4y| = 48$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 - 3x + 3y + 1 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3 = 0. \end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины L и M треугольника FLM и пересекает его стороны FL и FM соответственно в точках A и H , отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника FLM к площади треугольника AH равно $\frac{49}{9}$.

а) Найдите отношение $LM : AH$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников AFM и FHL равно $\frac{1}{4}$. Найдите отношение $AL : MH$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 27

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{9} + 33$.

2. Решите неравенство

$$x^2 + x + 20 > 8|x - \sqrt{x} + 1| + 2x\sqrt{x}.$$

3. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 07 *$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 6, 7 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y + xy^2 + 3x + 3y + 24 = 0, \\ x^3 y - xy^3 + 3x^2 - 3y^2 - 48 = 0. \end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины Q и E треугольника MQE и пересекает его стороны MQ и ME соответственно в точках B и D , отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BDM к площади треугольника MQE равно $\frac{9}{121}$.

а) Найдите отношение $QE : BD$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BME и DQM равно

4. Найдите отношение $BQ : DE$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
9 класс

БИЛЕТ 28

ШИФР _____

заполняется ответственным секретарём

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе $y = -\frac{x^2}{3} + 98$.

2. Решите неравенство

$$4x^2 + x + 5 > 2|4x - 2\sqrt{x} + 1| + 4x\sqrt{x}.$$

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|4x| + |3y| + |24 - 4x - 3y| = 24$, и найдите площадь полученной фигуры.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 - 5x + 5y + 3 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 5x^2 + 5y^2 + 15 = 0. \end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершины P и T треугольника MPT и пересекает его стороны MP и MT соответственно в точках D и E , отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника MDE к площади треугольника MPT равно $\frac{1}{4}$.

а) Найдите отношение $DE : TP$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников MDT и EMP равно $\frac{4}{9}$. Найдите отношение $TE : PD$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{4} + 11x + 23.$$

Ответ: 22.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{4} + 11x + 23 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x+2)(x-46) > 0$, откуда $-2 < x < 46$. На этом промежутке существует 45 натуральных значений x : $x=1, x=2, \dots, x=45$. При этом y принимает целые значения только при чётных x – всего 22 возможности. Итак, получаем 22 точки, принадлежащих параболу, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x+1}} \geq 1 + \sqrt{x+1}$.

Ответ: $x \in (0; 1]$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условиями $x \geq 0$, $1 - \sqrt{x+1} \neq 0$, откуда получаем, что $x > 0$. Заметим, что на ОДЗ знаменатель дроби отрицателен, поэтому можем обе части неравенства на него домножить, поменяв при этом знак неравенства. Тогда

$$\sqrt{x} - 2 \leq 1 - (x+1) \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 - x \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ x \leq 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty), \end{cases}$$

откуда $x \leq 1$. С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in (0; 1]$.

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 13122.

Решение. Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 (0, 1, 2, ..., 8), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 13122$ способа.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a|x-1| + \frac{x^2 - 7x + 12}{3-x} = 0$ имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Решение. При условии $x \neq 3$ данное уравнение равносильно уравнению $a|x-1| = x-4$. График правой части уравнения – прямая $y = x-4$. График левой части уравнения – это “уголок” с вершиной в точке $(1; 0)$, наклон ветвей которого определяется параметром a .

Левая ветвь “уголка” пересекает прямую при $a < -1$, правая ветвь пересекает прямую при $a < 1$ и $a \neq -\frac{1}{2}$ (при $a = -\frac{1}{2}$ правая ветвь проходит через выколотую точку прямой – точку $(3; -1)$). Следовательно, ровно одно

решение получается при $a \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + \sqrt{x+2y} - 2y = \frac{7}{2}, \\ x^2 + x + 2y - 4y^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{19}{4}; \frac{17}{8}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+2y} = u$, $x-2y = v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v = \frac{7}{2}, \\ u^2v + u^2 = \frac{27}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \frac{7}{2} - u, \\ u^2\left(\frac{7}{2} - u\right) + u^2 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $2u^3 - 9u^2 + 27 = 0$. Подбирая целый корень $u = 3$ и выделяя множитель $(u-3)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u-3)(2u^2 - 3u - 9) = 0$, откуда $u = 3$ или $u = -\frac{9}{2}$. Значение $u = -\frac{9}{2}$ не подходит. При $u = 3$ получаем $v = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} x+2y = 9, \\ x-2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{19}{2}, \\ 4y = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{4}, \\ y = \frac{17}{8}. \end{cases}$$

6. Точка K лежит на стороне AB треугольника ABC с углом 120° при вершине C . В треугольники AKC и BKC вписаны окружности с центрами O и Q соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника OQC , если $OK = 6$, $KQ = 7$.

Ответ: $\sqrt{\frac{85}{3}}$.

Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи KO и KQ являются биссектрисами углов AKC и BKC . Поскольку угол между биссектрисами смежных углов прямой, то $\angle OKQ = 90^\circ$, и тогда по теореме Пифагора находим, что $OQ = \sqrt{OK^2 + KQ^2} = \sqrt{85}$.

Так как CO и CQ – биссектрисы углов ACK и BCK , то

$$\angle OCQ = \angle OCK + \angle QCK = \frac{1}{2}\angle ACK + \frac{1}{2}\angle BCK = \frac{1}{2}\angle BCA = 60^\circ.$$

По обобщённой теореме синусов для треугольника ADT находим, что искомый радиус равен $\frac{OQ}{2 \sin \angle OCQ} = \sqrt{\frac{85}{3}}$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{4} + 3x + \frac{253}{4}.$$

Ответ: 11.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{4} + 3x + \frac{253}{4} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x+11)(x-23) > 0$,

откуда $-11 < x < 23$. На этом промежутке существует 22 натуральных значений x : $x = 1, x = 2, \dots, x = 22$. При этом y принимает целые значения только при чётных x – всего 11 возможностей. Итак, получаем 11 точек, принадлежащих параболу, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2-x}-2}{1-\sqrt{3-x}} \geq 1 + \sqrt{3-x}$.

Ответ: $x \in [1; 2)$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условиями $x \leq 2$, $1 - \sqrt{3-x} \neq 0$, откуда получаем, что $x < 2$. Заметим, что на ОДЗ знаменатель дроби отрицателен, поэтому можем обе части неравенства на него домножить, поменяв при этом знак неравенства. Тогда

$$\sqrt{2-x} - 2 \leq 1 - (3-x) \Leftrightarrow \sqrt{2-x} \leq x \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \geq 0, \\ 2-x \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty), \end{cases}$$

откуда $x \geq 1$. С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in [1; 2)$.

3. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 0 *$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3645.

Решение. Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Для того чтобы выполнялась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 2, 4, 6 или 8 (5 способов).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 (0, 1, 2, ..., 8), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 3645$ способов.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a|x+1| + \frac{x^2 - 5x + 6}{2-x} = 0$ имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Решение. При условии $x \neq 2$ данное уравнение равносильно уравнению $a|x+1| = x-3$. График правой части уравнения – прямая $y = x-3$. График левой части уравнения – это “уголок” с вершиной в точке $(-1; 0)$, наклон ветвей которого определяется параметром a .

Левая ветвь “уголка” пересекает прямую при $a < -1$, правая ветвь пересекает прямую при $a < 1$ и $a \neq -\frac{1}{3}$ (при

$a = -\frac{1}{3}$ правая ветвь проходит через выколотую точку прямой – точку $(2; -1)$). Следовательно, ровно одно

решение получается при $a \in \left[-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \sqrt{y-3x} + 3x = 12, \\ y^2 + y - 3x - 9x^2 = 144. \end{cases}$

Ответ: $(-24; 72), \left(-\frac{4}{3}; 12\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{y-3x}=u$, $y+3x=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=12, \\ u^2v+u^2=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=12-u, \\ u^2(12-u)+u^2=144. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3-13u^2+144=0$. Подбирая целый корень $u=4$ и выделяя множитель $(u-4)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u-4)(u^2-9u-36)=0$, откуда $u=-3$, $u=4$ или $u=12$. Значение $u=-3$ не подходит. При $u=4$ получаем $v=8$. Тогда

$$\begin{cases} y-3x=16, \\ y+3x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=24, \\ 6x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{4}{3}, \\ y=12. \end{cases}$$

При $u=12$ получаем $v=0$. Тогда

$$\begin{cases} y-3x=144, \\ y+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=144, \\ 6x=-144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-24, \\ y=72. \end{cases}$$

6. Точка P лежит на стороне BC треугольника ABC с углом 60° при вершине A . В треугольники APB и APC вписаны окружности с центрами D и T соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADT , если $PD=7$, $PT=4$.

Ответ: $\sqrt{65}$.

Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи PT и PD являются биссектрисами углов CPA и BPA . Поскольку угол между биссектрисами смежных углов прямой, то

$$\angle DPT = 90^\circ, \text{ и тогда по теореме Пифагора находим, что } DT = \sqrt{PD^2 + PT^2} = \sqrt{65}.$$

Так как AD и AT – биссектрисы углов BAP и CAP , то

$$\angle DAT = \angle DAP + \angle TAP = \frac{1}{2} \angle BAP + \frac{1}{2} \angle CAP = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ.$$

По обобщённой теореме синусов для треугольника ADT находим, что искомый радиус равен $\frac{DT}{2 \sin \angle DAT} = \sqrt{65}$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{4} + 9x + 19.$$

Ответ: 18.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{4} + 9x + 19 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x+2)(x-38) > 0$, откуда

$-2 < x < 38$. На этом промежутке существует 37 натуральных значений x : $x=1, x=2, \dots, x=37$. При этом y принимает целые значения только при чётных x – всего 18 возможностей. Итак, получаем 18 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x}-6}{2-\sqrt{x+4}} \geq 2 + \sqrt{x+4}$.

Ответ: $x \in (0; 4]$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условиями $x \geq 0$, $2 - \sqrt{x+4} \neq 0$, откуда получаем, что $x > 0$. Заметим, что на ОДЗ знаменатель дроби отрицателен, поэтому можем обе части неравенства на него домножить, поменяв при этом знак неравенства. Тогда

$$\sqrt{x}-6 \leq 4-(x+4) \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 6-x \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6-x \geq 0, \\ x \leq 36-12x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ x^2-13x+36 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ x \in (-\infty; 4] \cup [9; +\infty), \end{cases}$$

откуда $x \leq 4$. С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in (0; 4]$.

3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1458.

Решение. Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 (0, 1, 2, ..., 8), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 1458$ способов.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a|2-x| + \frac{x^2-x-6}{3-x} = 0$ имеет ровно

одно решение.

Ответ: $a \in (-1; 1] \cup \{5\}$.

Решение. При условии $x \neq 3$ данное уравнение равносильно уравнению $a|x-2| = x+2$. График правой части уравнения – прямая $y = x+2$. График левой части уравнения – это “уголок” с вершиной в точке $(2; 0)$, наклон ветвей которого определяется параметром a .

Левая ветвь “уголка” пересекает прямую при $a > -1$, правая ветвь пересекает прямую при $a > 1$ и $a \neq 5$ (при $a = 5$ правая ветвь проходит через выколотую точку прямой – точку $(3; 5)$). Следовательно, ровно одно решение получается при $a \in (-1; 1] \cup \{5\}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + \sqrt{2x+3y} - 3y = 5, \\ 4x^2 + 2x + 3y - 9y^2 = 32. \end{cases}$

Ответ: $(\frac{17}{4}; \frac{5}{2})$.

Решение. Обозначим $\sqrt{2x+3y} = u$, $2x-3y = v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^2v+u^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=5-u, \\ u^2(5-u)+u^2=32. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3 - 6u^2 + 32 = 0$. Подбирая целый корень $u = -2$ и выделяя множитель $(u + 2)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u + 2)(u^2 - 8u + 16) = 0$, откуда $u = -2$ или $u = 4$. Значение $u = -2$ не подходит. При $u = 4$ получаем $v = 1$. Тогда

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 17, \\ 6y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{4}, \\ y = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

6. Точка A лежит на стороне LM треугольника KLM с углом 120° при вершине K . В треугольники AKL и AKM вписаны окружности с центрами F и O соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника FKO , если $AO = 2$, $AF = 7$.

Ответ: $\sqrt{\frac{53}{3}}$.

Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи AF и AO являются биссектрисами углов LAK и MAK . Поскольку угол между биссектрисами смежных углов прямой,

то $\angle FAO = 90^\circ$, и тогда по теореме Пифагора находим, что $FO = \sqrt{FA^2 + OA^2} = \sqrt{53}$.

Так как KF и KO – биссектрисы углов LKA и MKA , то

$$\angle FKO = \angle FKA + \angle OKA = \frac{1}{2} \angle LKA + \frac{1}{2} \angle MKA = \frac{1}{2} \angle LKM = 60^\circ.$$

По обобщённой теореме синусов для треугольника FKO находим, что искомый радиус равен $\frac{FO}{2 \sin \angle FKO} = \sqrt{\frac{53}{3}}$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{4} + 5x + 39.$$

Ответ: 12.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{4} + 5x + 39 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x+6)(x-26) > 0$, откуда $-6 < x < 26$. На этом промежутке существует 25 натуральных значений x : $x=1, x=2, \dots, x=25$. При этом y принимает целые значения только при чётных x – всего 12 возможностей. Итак, получаем 12 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{1-x}-12}{1-\sqrt{2-x}} \geq 1 + \sqrt{2-x}$.

Ответ: $x \in [-8; 1)$.

Решение. ОДЗ неравенства определяется условиями $x \leq 1$, $1 - \sqrt{2-x} \neq 0$, откуда получаем, что $x < 1$. Заметим, что на ОДЗ знаменатель дроби отрицателен, поэтому можем обе части неравенства на него домножить, поменяв при этом знак неравенства. Тогда

$$\sqrt{1-x}-12 \leq 1-(2-x) \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \leq 1+x \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1+x \geq 0, \\ 1-x \leq 121+22x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11, \\ x^2+23x+120 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11, \\ x \in (-\infty; -15] \cup [-8; +\infty), \end{cases}$$

откуда $x \geq -8$. С учётом ОДЗ окончательно получаем $x \in [-8; 1)$.

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 26244.

Решение. Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Для того чтобы выполнялась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 2, 4, 6 или 8 (4 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 (0, 1, 2, ..., 8), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $4 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 26244$ способов.

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a|2+x| + \frac{x^2+x-12}{x+4} = 0$ имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in (-1; 1] \cup \left\{ \frac{7}{2} \right\}$.

Решение. При условии $x \neq -4$ данное уравнение равносильно уравнению $a|x+2| = 3-x$. График правой части уравнения – прямая $y = x-3$. График левой части уравнения – это “уголок” с вершиной в точке $(-2; 0)$, наклон ветвей которого определяется параметром a .

Правая ветвь “уголка” пересекает прямую при $a > -1$, левая ветвь пересекает прямую при $a > 1$ и $a \neq \frac{7}{2}$ (при $a = \frac{7}{2}$ правая ветвь проходит через выколотую точку прямой – точку $(-4; 7)$). Следовательно, ровно одно решение получается при $a \in (-1; 1] \cup \left\{ \frac{7}{2} \right\}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + \sqrt{3x-y} + y = 6, \\ 9x^2 + 3x - y - y^2 = 36. \end{cases}$

Ответ: $(2; -3), (6; -18)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{3x-y} = u$, $3x+y = v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u + v = 6, \\ u^2 v + u^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 6 - u, \\ u^2(6 - u) + u^2 = 36. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3 - 7u^2 + 36 = 0$. Подбирая целый корень $u = -2$ и выделяя множитель $(u + 4)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u + 2)(u^2 - 9u + 18) = 0$, откуда $u = -2$, $u = 3$ или $u = 6$. Значение $u = -2$ не подходит. При $u = 3$ получаем $v = 3$. Тогда

$$\begin{cases} 3x - y = 9, \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -6, \\ 6x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -3. \end{cases}$$

При $u = 6$ получаем $v = 0$. Тогда

$$\begin{cases} 3x - y = 36, \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -36, \\ 6x = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = -18. \end{cases}$$

6. Точка N лежит на стороне DE треугольника CDE с углом 60° при вершине C . В треугольники CNE и CDE вписаны окружности с центрами K и P соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CKP , если $KN = 8$, $NP = 7$.

Ответ: $\sqrt{113}$.

Решение. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому лучи NK и NP являются биссектрисами углов ENC и DNC . Поскольку угол между биссектрисами смежных углов прямой,

то $\angle KNP = 90^\circ$, и тогда по теореме Пифагора находим, что $KP = \sqrt{KN^2 + PN^2} = \sqrt{113}$.

Так как CK и CP – биссектрисы углов ECN и DCN , то

$$\angle KCP = \angle KCN + \angle PCN = \frac{1}{2} \angle ECN + \frac{1}{2} \angle DCN = \frac{1}{2} \angle ECD = 30^\circ.$$

По обобщённой теореме синусов для треугольника CKP находим, что искомый радиус равен $\frac{KP}{2 \sin \angle KCP} = \sqrt{113}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

- 1.(5) Решено неравенство $y > 0$ (или $y \geq 0$) 2 балла,
– сформулировано утверждение, что надо найти количество чётных натуральных чисел из полученного промежутка 2 балла.
- 2.(5) Неэквивалентное преобразование неравенства 0 баллов за все последующие действия,
– не учтено ОДЗ снять 2 балла.
- 3.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа 1 балл,
– за формулировки признаков делимости на 12 (на 75) баллы не добавляются,
– при решении перебором получен неверный ответ не более 1 балла за задачу,
– ответ записан в виде $6^k \cdot 8$ и т.п. баллы не снимаются.
- 4.(5) Не учтён случай, когда одна из ветвей графика $y = a|x - x_0|$ параллельна прямой снять 1 балл,
– не учтён случай, когда одна из ветвей графика проходит через выколотую точку снять 1 балл.
- 5.(6) Сделана замена переменных (как в решении) 1 балл,
– получено кубическое уравнение относительно одной из новых переменных 1 балл,
– решено кубическое уравнение 2 балла,
– получены посторонние решения снять 1 балл.
- 6.(5) Доказано, что отрезок, соединяющий центры окружностей, виден из основания биссектрисы под прямым углом 1 балл,
– найден отрезок, соединяющий центры окружностей 1 балл,
– найден угол искомого треугольника, лежащий напротив отрезка, соединяющего центры окружностей 1 балл.

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{3} + 13x + 42.$$

Ответ: 13.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3} + 13x + 42 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x+3)(x-42) > 0$, откуда $-3 < x < 42$. На этом промежутке существует 41 натуральное значение x : $x=1, x=2, \dots, x=41$. При этом y принимает целые значения только при x , делящихся на 3 – всего 13 возможностей. Итак, получаем 13 точек, принадлежащих параболу, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Найдите значение выражения $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, где a и b – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения

$$x^3 - 7x^2 + 7x = 1.$$

Ответ: 34.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему

$$(x^3 - 1) - 7(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) - 7x(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 6x + 1) = 0,$$

откуда $x=1$ или $x=3 \pm \sqrt{8}$. Наибольший корень – это $a=3 + \sqrt{8}$, наименьший – $b=3 - \sqrt{8}$. Тогда

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{3 + \sqrt{8}}{3 - \sqrt{8}} + \frac{3 - \sqrt{8}}{3 + \sqrt{8}} = \frac{(3 + \sqrt{8})^2 + (3 - \sqrt{8})^2}{(3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8})} = \frac{2(9 + 8)}{1} = 34.$$

3. В числе 2016***02** нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184.

Решение. Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 5184$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 \leq 4, \\ y + 2x \leq 0 \end{cases}$$
 и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: $\frac{5 + \pi}{4}$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Возможны четыре случая.

1) $x \geq 0, y \geq 0$ (первая четверть). Тогда $0 \leq 4$, неравенству удовлетворяют все точки первой четверти.

2) $x < 0, y \geq 0$ (вторая четверть). Тогда $4x^2 \leq 4, |x| \leq 1$; в этом случае x отрицателен, поэтому $x \geq -1$.

3) $x < 0, y < 0$ (третья четверть). Тогда $4x^2 + 4y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1^2$. Получаем точки, лежащие на окружности с центром $O(0; 0)$ радиуса 1 или внутри неё.

4) $x \geq 0, y < 0$ (четвёртая четверть). Тогда $4y^2 \leq 4$; в этом случае y отрицателен, поэтому $y \geq -1$.

Второе неравенство задаёт множество точек, расположенных на прямой $y = -2x$ или ниже.

Множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, представляет собой объединение

– четверти окружности с центром O радиуса 2, лежащей в третьей четверти (площадь $\frac{\pi}{4}$),

– треугольника с вершинами $O, A(-1; 2), B(-1; 0)$ (площадь 1),

– треугольника с вершинами $O, C\left(\frac{1}{2}; -1\right), D(0; -1)$ (площадь $\frac{1}{4}$).

Значит, площадь множества равна $\frac{5 + \pi}{4}$.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = 0, \\ 3x^2y^2 + y^4 = 84. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 3\right), \left(4\sqrt{\frac{21}{76}}; 2 \cdot 4\sqrt{\frac{84}{19}}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{y}{x}} = u, \sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0, v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{y^2} = |y| = y$,

$\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv - 2v - u + 2 = 0, \\ 3v^4 + u^4v^4 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-1)(u-2) = 0, \\ 3v^4 + u^4v^4 = 84. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v = 1$ или $u = 2$.

Если $v = 1$, то $3 + u^4 = 84$, откуда $u = 3$; тогда $x = \frac{v}{u} = \frac{1}{3}, y = uv = 3$.

Если $u = 2$, то $3v^4 + 16v^4 = 84$, откуда $v = 4\sqrt{\frac{84}{19}}$; тогда $x = \frac{v}{u} = 4\sqrt{\frac{21}{76}}, y = uv = 2 \cdot 4\sqrt{\frac{84}{19}}$.

6. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и T соответственно, причём $AK : KB = 3 : 2, BT : TC = 1 : 2$. Найдите AC , если $KT = \sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{5}$.

Решение. Пусть $BK = 2x, BT = y$; тогда $AK = 3x, CT = 2y$. По теореме о двух секущих $BK \cdot BA = BT \cdot BC$, откуда

$2x \cdot 5x = y \cdot 3y, y = x\sqrt{\frac{10}{3}}$. Треугольники ABC и TBK подобны по двум сторонам и углу между ними

($BA : BT = BC : BK, \angle B$ – общий), а коэффициент подобия равен $\frac{BC}{BK} = \frac{3y}{2x} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{15}{2}}$. Значит,

$$AC = KT \cdot \sqrt{\frac{15}{2}} = 3\sqrt{5}.$$

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{3} + 7x + 54.$$

Ответ: 8.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3} + 7x + 54 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x+6)(x-27) > 0$, откуда $-6 < x < 27$. На этом промежутке существует 26 натуральных значений x : $x=1, x=2, \dots, x=26$. При этом y принимает целые значения только при x , делящихся на 3 – всего 8 возможностей. Итак, получаем 8 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Найдите значение выражения $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$, где p и q – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения

$$x^3 + 6x^2 + 6x = -1.$$

Ответ: 23.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему

$$(x^3 + 1) + 6(x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) + 6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 5x + 1) = 0,$$

откуда $x = -1$ или $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$. Наибольший корень – это $p = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$, наименьший – $q = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}$. Тогда

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{-5 + \sqrt{21}}{-5 - \sqrt{21}} + \frac{-5 - \sqrt{21}}{-5 + \sqrt{21}} = \frac{(-5 + \sqrt{21})^2 + (-5 - \sqrt{21})^2}{(-5 - \sqrt{21})(-5 + \sqrt{21})} = \frac{2(25 + 21)}{4} = 23.$$

3. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 6, 7, 8 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2160.

Решение. Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 2, 4, 6, 8 (5 способов).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 6), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 2160$ способов.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (|x| - x)^2 + (|y| - y)^2 \leq 16, \\ 2y + x \leq 0 \end{cases}$$

и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: $5 + \pi$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Возможны четыре случая.

- 1) $x \geq 0, y \geq 0$ (первая четверть). Тогда $0 \leq 16$, неравенству удовлетворяют все точки первой четверти. в этом случае x положителен, поэтому $x \leq 2$.
- 2) $x < 0, y \geq 0$ (вторая четверть). Тогда $4x^2 \leq 16, |x| \leq 2$; в этом случае x отрицателен, поэтому $x \geq -2$.
- 3) $x < 0, y < 0$ (третья четверть). Тогда $4x^2 + 4y^2 \leq 16, x^2 + y^2 \leq 2^2$. Получаем точки, лежащие на окружности с центром $O(0; 0)$ радиуса 2 или внутри неё.
- 4) $x \geq 0, y < 0$ (четвёртая четверть). Тогда $4y^2 \leq 16, |y| \leq 2$; в этом случае y отрицателен, поэтому $y \geq -2$.

Второе неравенство задаёт множество точек, расположенных на прямой $y = -\frac{x}{2}$ или ниже.

Множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, представляет собой объединение

- четверти окружности с центром O радиуса 2, лежащей в третьей четверти (площадь π),
- треугольника с вершинами $O, A(-2; 1), B(-2; 0)$ (площадь 1),
- треугольника с вершинами $O, C(4; -2), D(0; -2)$ (площадь 4).

Значит, площадь множества равна $5 + \pi$.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} x - 3\sqrt{xy} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} + 6 = 0, \\ x^2 y^2 + x^4 = 82. \end{cases}$$

Ответ: $\left(3; \frac{1}{3}\right), \left(\sqrt[4]{66}; \frac{4}{\sqrt[4]{66}}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}} = u$, $\sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0$, $v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{x^2} = |x| = x$,

$\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y^2} = |y| = y$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv - 3v - 2u + 6 = 0, \\ v^4 + u^4 v^4 = 82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-2)(u-3) = 0, \\ v^4 + u^4 v^4 = 82. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v = 2$ или $u = 3$.

Если $v = 2$, то $16 + 16u^4 = 82$, откуда $u = \frac{\sqrt[4]{66}}{2}$; тогда $y = \frac{v}{u} = \frac{4}{\sqrt[4]{66}}$, $x = uv = \sqrt[4]{66}$.

Если $u = 3$, то $v^4 + 81v^4 = 82$, откуда $v = 1$; тогда $y = \frac{v}{u} = \frac{1}{3}$, $x = uv = 3$.

6. Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает его стороны AC и BC в точках Q и N соответственно, причём $AQ:QC = 5:2$, $CN:NB = 5:2$. Найдите AB , если $QN = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $7\sqrt{5}$.

Решение. Пусть $CQ = 2x$, $CN = 5y$; тогда $AQ = 5x$, $CT = 2y$. По теореме о двух секущих $CQ \cdot CA = CN \cdot CB$, откуда $2x \cdot 7x = 5y \cdot 7y$, $y = x\sqrt{\frac{2}{5}}$. Треугольники ABC и NQC подобны по двум сторонам и углу между ними

($CA:CN = CB:CQ$, $\angle C$ – общий), а коэффициент подобия равен $\frac{BC}{BQ} = \frac{7y}{2x} = \frac{7}{2} \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$. Значит,

$$AB = QN \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} = 7\sqrt{5}.$$

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{3} + 5x + 72.$$

Ответ: 7.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3} + 5x + 72 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x+9)(x-24) > 0$, откуда $-9 < x < 24$. На этом промежутке существует 23 натуральных значения x : $x=1, x=2, \dots, x=23$. При этом y принимает целые значения только при x , делящихся на 3 – всего 7 возможностей. Итак, получаем 7 точек, принадлежащих параболу, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Найдите значение выражения $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, где a и b – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения

$$x^3 - 9x^2 + 9x = 1.$$

Ответ: 62.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему

$$(x^3 - 1) - 9(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) - 9x(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 8x + 1) = 0,$$

откуда $x=1$ или $x=4 \pm \sqrt{15}$. Наибольший корень – это $a=4 + \sqrt{15}$, наименьший – $b=4 - \sqrt{15}$. Тогда

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4 + \sqrt{15}}{4 - \sqrt{15}} + \frac{4 - \sqrt{15}}{4 + \sqrt{15}} = \frac{(4 + \sqrt{15})^2 + (4 - \sqrt{15})^2}{(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})} = \frac{2(16 + 15)}{1} = 62.$$

3. В числе 2016***02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 864.

Решение. Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 864$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| + y)^2 \leq 4, \\ 3y + x \leq 0 \end{cases}$$
 и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: ∞ .

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Возможны четыре случая.

- 1) $x \geq 0, y \geq 0$ (первая четверть). Тогда $4x^2 + 4y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1^2$. Получаем точки, лежащие на окружности с центром $O(0; 0)$ радиуса 1 или внутри неё.
- 2) $x < 0, y \geq 0$ (вторая четверть). Тогда $4y^2 \leq 4, |y| \leq 1$; в этом случае y положителен, поэтому $y \leq 1$.
- 3) $x < 0, y < 0$ (третья четверть). Тогда $0 \leq 4$. Этому неравенству удовлетворяют все точки третьей четверти.
- 4) $x \geq 0, y < 0$ (четвёртая четверть). Тогда $4x^2 \leq 4, |x| \leq 1$; в этом случае x положителен, поэтому $x \leq 1$.

Второе неравенство задаёт множество точек, расположенных на прямой $y = -\frac{x}{3}$ или ниже.

Площадь множества равна бесконечности (ему принадлежат все точки третьей четверти, а также некоторые точки второй и четвёртой четвертей).

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{xy} - 4\sqrt{\frac{x}{y}} + 2 = 0, \\ 2x^2 + x^2y^4 = 18y^2. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2), \left(\frac{\sqrt[4]{286}}{4}; \sqrt[4]{286}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{x}{y}} = u$, $\sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0$, $v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{x^2} = |x| = x$,

$\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y^2} = |y| = y$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} 2uv - v - 4u + 2 = 0, \\ 2u^2v^2 + \frac{v^6}{u^2} = \frac{18v^2}{u^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-2)(2u-1) = 0, \\ v^4 + 2u^4 = 18. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v = 2$ или $u = \frac{1}{2}$.

Если $v = 2$, то $16 + 2u^4 = 18$, откуда $u = 1$; тогда $y = \frac{v}{u} = 2$, $x = uv = 2$.

Если $u = \frac{1}{2}$, то $v^4 + \frac{1}{8} = 18$, откуда $v = \frac{\sqrt[4]{286}}{2}$; тогда $y = \frac{v}{u} = \sqrt[4]{286}$, $x = uv = \frac{\sqrt[4]{286}}{4}$.

6. Окружность проходит через вершины A и K треугольника AKT и пересекает его стороны AT и KT в точках C и N соответственно, причём $AC : CT = 4 : 1$, $TN : NK = 1 : 2$. Найдите AK , если $CN = \sqrt{10}$.

Ответ: $5\sqrt{6}$.

Решение. Пусть $CT = x$, $TN = y$; тогда $AC = 4x$, $KN = 2y$. По теореме о двух секущих $TC \cdot TA = TN \cdot TK$, откуда

$x \cdot 5x = y \cdot 3y$, $y = x\sqrt{\frac{5}{3}}$. Треугольники AKT и CNT подобны по двум сторонам и углу между ними

($AT : NT = KT : CT$, $\angle T$ – общий), а коэффициент подобия равен $\frac{AT}{NT} = \frac{5x}{y} = 5\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{15}$. Значит,

$AK = CN \cdot \sqrt{15} = 5\sqrt{6}$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{3} + 20x + 63.$$

Ответ: 20.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3} + 20x + 63 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(x+3)(x-63) > 0$, откуда $-3 < x < 63$. На этом промежутке существует 62 натуральных значения x : $x=1, x=2, \dots, x=62$. При этом y принимает целые значения только при x , делящихся на 3 – всего 20 возможностей. Итак, получаем 20 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Найдите значение выражения $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$, где p и q – соответственно наибольший и наименьший корни уравнения

$$x^3 - 8x^2 + 8x = 1.$$

Ответ: 47.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему

$$(x^3 - 1) - 8(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) - 8x(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 7x + 1) = 0,$$

откуда $x=1$ или $x = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}$. Наибольший корень – это $p = \frac{7 + \sqrt{45}}{2}$, наименьший – $q = \frac{7 - \sqrt{45}}{2}$. Тогда

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{7 + \sqrt{45}}{7 - \sqrt{45}} + \frac{7 - \sqrt{45}}{7 + \sqrt{45}} = \frac{(7 + \sqrt{45})^2 + (7 - \sqrt{45})^2}{(7 + \sqrt{45})(7 - \sqrt{45})} = \frac{2(49 + 45)}{4} = 47.$$

3. В числе 2016****02* нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1728.

Решение. Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 2, 4, 8 (4 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 1728$ способов.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (|x| + x)^2 + (|y| - y)^2 \leq 16, \\ y - 3x \leq 0 \end{cases}$$
 и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: $\frac{20}{3} + \pi$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Возможны четыре случая.

- 1) $x \geq 0, y \geq 0$ (первая четверть). Тогда $4x^2 \leq 16, |x| \leq 2$; в этом случае x положителен, поэтому $x \leq 2$.
- 2) $x < 0, y \geq 0$ (вторая четверть). Тогда $0 \leq 16$, неравенству удовлетворяют все точки второй четверти.
- 3) $x < 0, y < 0$ (третья четверть). Тогда $4y^2 \leq 16, |y| \leq 2$; в этом случае y отрицателен, поэтому $y \geq -2$.
- 4) $x \geq 0, y < 0$ (четвёртая четверть). Тогда $4x^2 + 4y^2 \leq 16, x^2 + y^2 \leq 2^2$. Получаем точки, лежащие на окружности с центром $O(0; 0)$ радиуса 2 или внутри неё.

Второе неравенство задаёт множество точек, расположенных на прямой $y = 3x$ или ниже.

Множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, представляет собой объединение

- четверти окружности с центром O радиуса 2, лежащей в четвёртой четверти (площадь π),
- треугольника с вершинами $O, A\left(-\frac{2}{3}; -2\right), B(0; -2)$ (площадь $\frac{2}{3}$),

– треугольника с вершинами O , $C(2; 0)$, $D(2; 6)$ (площадь 6).

Значит, площадь множества равна $\frac{20}{3} + \pi$.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений
$$\begin{cases} 3y - \sqrt{\frac{y}{x}} - 6\sqrt{xy} + 2 = 0, \\ x^2 + 81x^2y^4 = 2y^2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt[4]{31}}{12}; \frac{\sqrt[4]{31}}{3}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{y}{x}} = u$, $\sqrt{xy} = v$ (при этом $u > 0$, $v > 0$). Тогда $uv = \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{y^2} = |y| = y$,

$\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} 3uv - u - 6v + 2 = 0, \\ \frac{v^2}{u^2} + 81v^6u^2 = 2u^2v^2 \Leftrightarrow \begin{cases} (u-2)(3v-1) = 0, \\ 1 + 81v^4u^4 = 2u^4. \end{cases} \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $u = 2$ или $v = \frac{1}{3}$.

Если $u = 2$, то $1 + 81 \cdot 16v^4 = 32$, откуда $v = \frac{\sqrt[4]{31}}{6}$; тогда $x = \frac{v}{u} = \frac{\sqrt[4]{31}}{12}$, $y = uv = \frac{\sqrt[4]{31}}{3}$.

Если $v = \frac{1}{3}$, то $1 + u^4 = 2u^4$, откуда $u = 1$; тогда $x = \frac{v}{u} = \frac{1}{3}$, $y = uv = \frac{1}{3}$.

6. Окружность проходит через вершины K и P треугольника KPM и пересекает его стороны KM и PM в точках F и B соответственно, причём $KF : FM = 3 : 1$, $PB : BM = 6 : 5$. Найдите KP , если $BF = \sqrt{15}$.

Ответ: $2\sqrt{33}$.

Решение. Пусть $FM = x$, $BM = 5y$; тогда $KF = 3x$, $BP = 6y$. По теореме о двух секущих $MF \cdot MK = MB \cdot MP$, откуда $x \cdot 4x = 5y \cdot 11y$, $y = \frac{2x}{\sqrt{55}}$. Треугольники KPM и BFM подобны по двум сторонам и углу между ними

($KM : BM = PM : FM$, $\angle M$ – общий), а коэффициент подобия равен $\frac{PM}{FM} = \frac{11y}{x} = 11\sqrt{\frac{4}{55}} = \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$. Значит,

$$KP = BF \cdot \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{33}.$$

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

- 1.(5)** Решено неравенство $y > 0$ или $y \geq 0$ **2 балла**,
– сформулировано утверждение, что надо найти количество кратных трём натуральных чисел из полученного промежутка **2 балла**.
- 2.(4)** Уравнение приведено к виду $(x - x_1)(x^2 + ax + b) = 0$ **1 балл**,
– найдены все корни уравнения и других продвижений нет **2 балла за всю задачу**,
– при решении использована теорема Виета для уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и не доказано, что его корни являются наибольшим и наименьшим корнями исходного уравнения **снять 1 балл**.
- 3.(6)** Указаны все возможные варианты для последней цифры числа **1 балл**,
– за формулировки признаков делимости на 6 (на 15) **баллы не добавляются**,
– при решении перебором получен неверный ответ **не более 1 балла за задачу**,
– ответ записан в виде $6^k \cdot 8$ и т.п. **баллы не снимаются**.
- 4.(6)** Построено множество точек, удовлетворяющих первому неравенству **4 балла**,
– построено множество точек, удовлетворяющих второму неравенству **1 балл**,
– найдена площадь **1 балл**.
- 5.(6)** Первое уравнение разложено на множители **2 балла**,
– за каждый из двух полученных случаев **2 балла**.
- 6.(5)** Доказано подобие треугольников с общим углом **2 балла**,
– вычислен отрезок **3 балла**.

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{9} + 50.$$

Ответ: 7.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{9} + 50 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 450$, откуда

$-\sqrt{450} < x < \sqrt{450}$. На этом промежутке существует 21 натуральное значение x : $x = 1, x = 2, \dots, x = 21$. При этом y принимает целые значения только при x , делящихся на 3 – всего 7 возможностей. Итак, получаем 7 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $8|x - \sqrt{x} + 2| + 2x\sqrt{x} < x^2 + x + 28$.

Ответ: $x \in [0; 4) \cup (9; +\infty)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно \sqrt{x} и $D < 0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$8(x - \sqrt{x} + 2) < (x^2 - 2x\sqrt{x} + x) + 28 \Leftrightarrow 8(x - \sqrt{x}) + 16 < (x - \sqrt{x})^2 + 28.$$

Обозначая $x - \sqrt{x} = t$, получаем $t^2 - 8t + 12 > 0$, откуда $t \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$.

Если $t < 2$, то $x - \sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4$.

Если $t > 6$, то $x - \sqrt{x} - 6 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$.

Значит, $x \in [0; 4) \cup (9; +\infty)$.

3. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 0 * 2 *$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2592.

Решение. Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 2592$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 60.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a , b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 15x \geq 0, \\ 8y \geq 0, \\ 120 - 15x - 8y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 15x + 8y \leq 120. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(8; 0)$, $G(0; 15)$, $N(0; 0)$, площадь которого равна 60.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-4; -1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x + y) - 2(x + y) + 10 = 0, \\ xy(x^2 - y^2) - 2(x^2 - y^2) - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy - 2)(x + y) = -10, \\ (xy - 2)(x - y)(x + y) = 30. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x - y = -3$, откуда $y = x + 3$.

Подставляем это в первое уравнение: $(x^2 + 3x - 2)(2x + 3) = -10$, $2x^3 + 9x^2 + 5x + 4 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнение – $x = -4$. Выделив множитель $(x + 4)$, получаем $(x + 4)(2x^2 + x + 1) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = -4$. Тогда $y = -1$, и пара чисел $(-4; -1)$ является единственным решением системы.

6. Окружность проходит через вершины A и N треугольника ACN и пересекает его стороны AC и CN соответственно в точках B и K , отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BCK к площади треугольника ACN равно $\frac{1}{4}$.

а) Найдите отношение $AN : BK$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BCN и ACK равно $\frac{9}{16}$. Найдите отношение $NK : AB$.

Ответ: а) $AN : BK = 2$, б) $NK : AB = 2 : 5$.

Решение. а) По теореме о двух секущих $CK \cdot CN = CB \cdot CA$. Значит, треугольники ACN и KCB подобны по двум сторонам и углу между ними ($AC : KC = CN : CB$, $\angle C$ – общий). Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому коэффициент подобия равен 2. Следовательно, $AN : BK = 2$.

б) Из подобия, доказанного в первом пункте, получаем также, что $AC = 2CK$, $CN = 2BC$. По теореме об отношении площадей треугольников с общим углом $\frac{S_{BCN}}{S_{ACK}} = \frac{CB}{CA} \cdot \frac{CN}{CK}$, откуда $\frac{9}{16} = \frac{CB}{2CK} \cdot \frac{2BC}{CK}$. Значит,

$\frac{CB}{CK} = \frac{3}{4}$. Пусть $CB = 3x$, тогда $CK = 4x$, $AC = 2CK = 8x$, $CN = 2BC = 6x$, $AB = AC - BC = 5x$, $NK = CN - CK = 2x$, поэтому $NK : AB = 2 : 5$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{3} + 70.$$

Ответ: 4.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3} + 70 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 210$, откуда

$-\sqrt{210} < x < \sqrt{210}$. На этом промежутке существует 14 натуральных значений x : $x=1, x=2, \dots, x=14$. При этом y принимает целые значения только при x , делящихся на 3 – всего 4 возможностей. Итак, получаем 7 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $4x^2 + x + 9 > 2|4x - 2\sqrt{x} + 3| + 4x\sqrt{x}$.

Ответ: $x \in [0; 1) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно \sqrt{x} и $D < 0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$(4x^2 - 4x\sqrt{x} + x) + 9 > 2(4x - 2\sqrt{x} + 3) \Leftrightarrow (2x - \sqrt{x})^2 + 9 > 4(2x - \sqrt{x}) + 6.$$

Обозначая $2x - \sqrt{x} = t$, получаем $t^2 - 4t + 3 > 0$, откуда $t \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Если $t < 1$, то $2x - \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$.

Если $t > 3$, то $2x - \sqrt{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$.

Значит, $x \in [0; 1) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

3. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 02 *$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1296.

Решение. Для того чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 4, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 4 или 8 (3 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 1296$ способов.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|3x| + |4y| + |48 - 3x - 4y| = 48$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 96.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a , b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x \geq 0, \\ 4y \geq 0, \\ 48 - 3x - 4y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 3x + 4y \leq 48. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(16; 0)$, $G(0; 12)$, $N(0; 0)$, площадь которого равна 96.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y - xy^2 - 3x + 3y + 1 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3 = 0. \end{cases}$

Ответ: (2; 1).

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x-y) - 3(x-y) + 1 = 0, \\ xy(x^2 - y^2) - 3(x^2 - y^2) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-3)(x-y) = -1, \\ (xy-3)(x-y)(x+y) = -3. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x+y=3$, откуда $y=-x+3$.

Подставляем это в первое уравнение: $(-x^2 + 3x - 3)(2x - 3) = -1$, $2x^3 - 9x^2 + 15x - 10 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнения – $x=2$. Выделив множитель $(x-2)$, получаем $(x-2)(2x^2 - 5x + 5) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x=2$. Тогда $y=1$, и пара чисел $(2;1)$ является единственным решением системы.

6. Окружность проходит через вершины L и M треугольника FLM и пересекает его стороны FL и FM соответственно в точках A и H , отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника FLM к площади треугольника AFH равно $\frac{49}{9}$.

а) Найдите отношение $LM : AH$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников AFM и FHL равно $\frac{1}{4}$. Найдите отношение $AL : MH$.

Ответ: а) $LM : AH = 7 : 3$, б) $AL : MH = 11$.

Решение. а) По теореме о двух секущих $FL \cdot FA = FM \cdot FH$. Значит, треугольники FLM и AFH подобны по двум сторонам и углу между ними ($FL : FH = FM : FA$, $\angle F$ – общий). Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому коэффициент подобия равен $\frac{7}{3}$. Следовательно, $LM : AH = 7 : 3$.

б) Из подобия, доказанного в первом пункте, получаем также, что $FL = \frac{7}{3}FH$, $FM = \frac{7}{3}FA$. По теореме об

отношении площадей треугольников с общим углом $\frac{S_{AFM}}{S_{FHL}} = \frac{FA}{FL} \cdot \frac{FM}{FH}$, откуда $\frac{1}{4} = \frac{FA}{\frac{7}{3}FH} \cdot \frac{\frac{7}{3}FA}{FH}$. Значит,

$\frac{FA}{FH} = \frac{1}{2}$. Пусть $CB = 3x$, тогда $FH = 6x$, $FL = \frac{7}{3}FH = 14x$, $FM = \frac{7}{3}FA = 7x$, $HM = FM - FH = x$, $AL = FL - FA = 11x$, поэтому $AL : MH = 11$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{9} + 33.$$

Ответ: 5.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{9} + 33 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 297$, откуда

$-\sqrt{297} < x < \sqrt{297}$. На этом промежутке существует 17 натуральных значений x : $x=1, x=2, \dots, x=17$. При этом y принимает целые значения только при x , делящихся на 3 – всего 5 возможностей. Итак, получаем 5 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $x^2 + x + 20 > 8|x - \sqrt{x} + 1| + 2x\sqrt{x}$.

Ответ: $x \in [0; 4) \cup (9; +\infty)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно \sqrt{x} и $D < 0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$(x^2 - 2x\sqrt{x} + x) + 20 > 8(x - \sqrt{x} + 1) \Leftrightarrow (x - \sqrt{x})^2 + 20 > 8(x - \sqrt{x}) + 8.$$

Обозначая $x - \sqrt{x} = t$, получаем $t^2 - 8t + 12 > 0$, откуда $t \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$.

Если $t < 2$, то $x - \sqrt{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4$.

Если $t > 6$, то $x - \sqrt{x} - 6 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9$.

Значит, $x \in [0; 4) \cup (9; +\infty)$.

3. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 07 *$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 6, 7 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 432.

Решение. Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 6), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 432$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|5x| + |12y| + |60 - 5x - 12y| = 60$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 30.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a , b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5x \geq 0, \\ 12y \geq 0, \\ 60 - 5x - 12y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 5x + 12y \leq 60. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(12; 0)$, $G(0; 5)$, $N(0; 0)$, площадь которого равна 30.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y + xy^2 + 3x + 3y + 24 = 0, \\ x^3y - xy^3 + 3x^2 - 3y^2 - 48 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-3; -1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x+y) + 3(x+y) + 24 = 0, \\ xy(x^2 - y^2) + 3(x^2 - y^2) - 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+3)(x+y) = -24, \\ (xy+3)(x-y)(x+y) = 48. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x - y = -2$, откуда $y = x + 2$.

Подставляем это в первое уравнение: $(x^2 + 2x + 3)(2x + 2) = -24$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 15 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнение – $x = -3$. Выделив множитель $(x + 3)$, получаем $(x + 3)(x^2 + 5) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = -3$. Тогда $y = -1$, и пара чисел $(-3; -1)$ является единственным решением системы.

6. Окружность проходит через вершины Q и E треугольника MQE и пересекает его стороны MQ и ME соответственно в точках B и D , отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника BDM к площади треугольника MQE равно $\frac{9}{121}$.

а) Найдите отношение $QE : BD$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников BME и DQM равно 4. Найдите отношение $BQ : DE$.

Ответ: а) $QE : BD = 11 : 3$, б) $BQ : DE = 5 : 19$.

Решение. а) По теореме о двух секущих $MQ \cdot MB = ME \cdot MD$. Значит, треугольники MQE и MDB подобны по двум сторонам и углу между ними ($MQ : MD = ME : MB$, $\angle M$ – общий). Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому коэффициент подобия равен $\frac{11}{3}$. Следовательно, $QE : BD = 11 : 3$.

б) Из подобия, доказанного в первом пункте, получаем также, что $MQ = \frac{11}{3}MD$, $ME = \frac{11}{3}MB$. По теореме об

отношении площадей треугольников с общим углом $\frac{S_{BME}}{S_{DQM}} = \frac{MB}{MQ} \cdot \frac{ME}{MD}$, откуда $4 = \frac{MB}{\frac{11}{3}MD} \cdot \frac{\frac{11}{3}MB}{MD}$. Значит,

$\frac{MB}{MD} = 2$. Пусть $MD = 3x$, тогда $MB = 6x$, $MQ = \frac{11}{3}MD = 11x$, $ME = \frac{11}{3}MB = 22x$, $DE = ME - MD = 19x$, $BQ = MQ - MB = 5x$, поэтому $BQ : DE = 5 : 19$.

1. Найдите количество точек плоскости xOy , имеющих *натуральные* координаты (x, y) и лежащих на параболе

$$y = -\frac{x^2}{3} + 98.$$

Ответ: 5.

Решение. Найдём те значения x , при которых y положителен: $-\frac{x^2}{3} + 98 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 294$, откуда

$-\sqrt{294} < x < \sqrt{294}$. На этом промежутке существует 17 натуральных значений x : $x=1, x=2, \dots, x=17$. При этом y принимает целые значения только при x , делящихся на 3 – всего 5 возможностей. Итак, получаем 5 точек, принадлежащих параболе, у которых обе координаты являются натуральными числами.

2. Решите неравенство $4x^2 + x + 5 > 2|4x - 2\sqrt{x} + 1| + 4x\sqrt{x}$.

Ответ: $x \in [0; 1) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно \sqrt{x} и $D < 0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$(4x^2 - 4x\sqrt{x} + x) + 5 > 2(4x - 2\sqrt{x} + 1) \Leftrightarrow (2x - \sqrt{x})^2 + 5 > 4(2x - \sqrt{x}) + 2.$$

Обозначая $2x - \sqrt{x} = t$, получаем $t^2 - 4t + 3 > 0$, откуда $t \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Если $t < 1$, то $2x - \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$.

Если $t > 3$, то $2x - \sqrt{x} - 3 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$.

Значит, $x \in [0; 1) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

3. В числе $2 * 0 * 1 * 6 * 0 * 2 *$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр 0, 2, 4, 5, 7, 9 (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184.

Решение. Для того чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Для того, чтобы выполнялась делимость на 4, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 4 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 5184$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|4x| + |3y| + |24 - 4x - 3y| = 24$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 24.

Решение. Заметим, что равенство $|a| + |b| + |c| = a + b + c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a , b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4x \geq 0, \\ 3y \geq 0, \\ 24 - 4x - 3y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 4x + 3y \leq 24. \end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(6; 0)$, $G(0; 8)$, $N(0; 0)$, площадь которого равна 24.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y - xy^2 - 5x + 5y + 3 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 5x^2 + 5y^2 + 15 = 0. \end{cases}$

Ответ: (4; 1).

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x-y) - 5(x-y) + 3 = 0, \\ xy(x^2 - y^2) - 5(x^2 - y^2) + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-5)(x-y) = -3, \\ (xy-5)(x-y)(x+y) = -15. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x+y=5$, откуда $y=-x+5$.

Подставляем это в первое уравнение: $(-x^2 + 5x - 5)(2x - 5) = -3$, $2x^3 - 15x^2 + 35x - 28 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнения $-x=4$. Выделив множитель $(x-4)$, получаем $(x-4)(2x^2 - 7x + 7) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x=4$. Тогда $y=1$, и пара чисел $(4;1)$ является единственным решением системы.

6. Окружность проходит через вершины P и T треугольника MPT и пересекает его стороны MP и MT соответственно в точках D и E , отличных от вершин треугольника. Отношение площади треугольника MDE к площади треугольника MPT равно $\frac{1}{4}$.

а) Найдите отношение $DE:TP$.

б) Пусть дополнительно известно, что отношение площадей треугольников MDT и EMP равно $\frac{4}{9}$. Найдите отношение $TE:PD$.

Ответ: а) $DE:TP=1:2$, б) $TE:PD=1:4$.

Решение. а) По теореме о двух секущих $MT \cdot ME = MP \cdot MD$. Значит, треугольники MPT и MED подобны по двум сторонам и углу между ними ($MP:ME = MT:MD$, $\angle M$ – общий). Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, поэтому коэффициент подобия равен 2. Следовательно, $DE:TP=1:2$.

б) Из подобия, доказанного в первом пункте, получаем также, что $MT=2MD$, $MP=2ME$. По теореме об отношении площадей треугольников с общим углом $\frac{S_{MDT}}{S_{EMP}} = \frac{MD}{MP} \cdot \frac{MT}{ME}$, откуда $\frac{4}{9} = \frac{MD}{2ME} \cdot \frac{2MD}{ME}$. Значит,

$\frac{MD}{ME} = \frac{2}{3}$. Пусть $MD=2x$, тогда $ME=3x$, $MP=2ME=6x$, $MT=2MD=4x$, $ET=MT-ME=x$, $DP=MP-MD=4x$, поэтому $TE:PD=1:4$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

- 1.(5) Решено неравенство $y > 0$ (или $y \geq 0$) 2 балла,
 – сформулировано утверждение, что надо найти количество кратных трём натуральных чисел из полученного промежутка 2 балла.
- 2.(5) Обоснованно раскрыт модуль 1 балл.
При решении с помощью замены:
 – сделана замена $ax - \sqrt{x} = t$ и неравенство приведено к неравенству относительно t 1 балл,
 – решено квадратное неравенство относительно t 1 балл,
 – за каждый из двух рассмотренных промежутков для t по 1 баллу.
При другом способе решения:
 – Неравенство приведено к виду $(\sqrt{x} + a)(\sqrt{x} + b)(\sqrt{x} + c)(\sqrt{x} + d) > 0$ 2 балла.
- 3.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа 1 балл,
 – за формулировки признаков делимости на 12 (на 75) баллы не добавляются,
 – при решении перебором получен неверный ответ не более 1 балла за задачу,
 – ответ записан в виде $6^k \cdot 8$ и т.п. баллы не снимаются.
- 4.(4) Построено множество 3 балла,
 – найдена его площадь 1 балл.
- 5.(6) Получено линейное соотношение между переменными (в билете 25 – $y = x + 3$, в билете 26 – $x + y = 3$, в билете 27 – $y = x + 2$, в билете 28 – $x + y = 5$) 3 балла,
 – решено кубическое уравнение 2 балла,
 – получено решение системы 1 балл.
- 6.(6) Доказано подобие треугольников с известным отношением площадей 2 балла,
 – найдено отношение пункта а) 1 балл,
 – найдено отношение пункта б) 3 балла.