

## 10 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- [4 балла] Дана геометрическая прогрессия  $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ , все члены которой положительны, а их сумма равна  $S$ . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е.  $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 50 раз, сумма  $S$  увеличится в 10 раз. А как изменится  $S$ , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е.  $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 2 раза?
- [4 балла] Решите уравнение  $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$ .
- [6 баллов] Решите неравенство  $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$ .
- [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке  $(0; 0)$ . Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках  $M_0(-2; -2\sqrt{7})$  и  $N_0(5; 5\sqrt{7})$  соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.
- [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по одну сторону от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
- [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- [4 балла] Дана геометрическая прогрессия  $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$ , все члены которой положительны, а их сумма равна  $S$ . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е.  $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 40 раз, сумма  $S$  увеличится в 5 раз. А как изменится  $S$ , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е.  $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$ ), увеличить в 3 раза?
- [4 балла] Решите уравнение  $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$ .
- [6 баллов] Решите неравенство  $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$ .
- [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке  $(0; 0)$ . В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках  $M_0(-1; 2\sqrt{2})$  и  $N_0(2; -4\sqrt{2})$  соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.
- [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по одну сторону от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ . б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 10$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
- [6 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [5 баллов] Бросили 80 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей меньше: того, что эта сумма больше 400, или того, что эта сумма не больше 160?
- [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия  $a_1, a_2, \dots, a_n$  с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна  $S$ , а  $a_1 > 0$ . Известно, что если разность прогрессии увеличить в 3 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма  $S$  увеличится в 2 раза. А во сколько раз увеличится  $S$ , если разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза (оставив первый член неизменным)?
- [4 балла] Решите неравенство  $(\sqrt{x^3 + 2x - 58} + 5) |x^3 - 7x^2 + 13x - 3| \leq 0$ .
- [5 баллов] Решите уравнение  $3x^4 + x^2 - 8x - 4x^2|x - 4| + 16 = 0$ .
- [5 баллов] По воде вокруг поплавок против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке  $(0; 0)$ . Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках  $M_0(2; 2\sqrt{7})$  и  $N_0(5; 5\sqrt{7})$  соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет наибольшим.
- [5 баллов] а) Две параллельные прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$  касаются окружности  $\omega_1$  с центром  $O_1$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Окружность  $\omega_2$  с центром  $O_2$  касается прямой  $\ell_1$  в точке  $D$ , пересекает прямую  $\ell_2$  в точках  $B$  и  $E$  и пересекает вторично окружность  $\omega_1$  в точке  $C$  (при этом точка  $O_2$  лежит между прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$ ). Известно, что отношение площади четырёхугольника  $BO_1CO_2$  к площади треугольника  $O_2BE$  равно  $\frac{3}{2}$ . Найдите отношение радиусов окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_1$ .  
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что  $BD = 1$ .
- [7 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 64, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

## 10 класс

ВАРИАНТ 12

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

- [5 баллов] Бросили 90 правильных игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что эта сумма не меньше 500, или того, что эта сумма меньше 130?
- [4 балла] Дана конечная арифметическая прогрессия  $a_1, a_2, \dots, a_n$  с положительной разностью, причём сумма всех её членов равна  $S$ , а  $a_1 > 0$ . Известно, что если разность прогрессии увеличить в 4 раза, а её первый член оставить неизменным, то сумма  $S$  увеличится в 3 раза. А во сколько раз увеличится  $S$ , если разность исходной прогрессии увеличить в 2 раза (оставив первый член неизменным)?
- [4 балла] Решите неравенство  $(\sqrt{x^3 + x - 90} + 7) |x^3 - 10x^2 + 31x - 28| \leq 0$ .
- [5 баллов] Решите уравнение  $5x^4 + x^2 + 8x - 6x^2|x + 4| + 16 = 0$ .
- [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке  $(0; 0)$ . В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках  $M_0(-1; 2\sqrt{2})$  и  $N_0(-2; 4\sqrt{2})$  соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет наибольшим.
- [5 баллов] а) Две параллельные прямые  $l_1$  и  $l_2$  касаются окружности  $\omega_1$  с центром  $O_1$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Окружность  $\omega_2$  с центром  $O_2$  касается прямой  $l_1$  в точке  $D$ , пересекает прямую  $l_2$  в точках  $B$  и  $E$  и пересекает вторично окружность  $\omega_1$  в точке  $C$  (при этом точка  $O_2$  лежит между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ ). Известно, что отношение площади четырёхугольника  $BO_1CO_2$  к площади треугольника  $O_2BE$  равно  $\frac{4}{3}$ . Найдите отношение радиусов окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_1$ .  
б) Найдите эти радиусы, если дополнительно известно, что  $BD = 2$ .
- [7 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = 64, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 289 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.